

## 1 Equations du premier ordre

### Exercice 1 ★ Varions la constante... –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
2.  $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$  sur  $] -1, +\infty[$  ;
3.  $y' - \frac{y}{x} = x^2$  sur  $]0, +\infty[$  ;
4.  $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$  sur  $\mathbb{R}$  ;
5.  $y' - \frac{2}{t}y = t^2$  sur  $]0, +\infty[$  ;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[255]

### Exercice 2 ★★ Raccordement détaillé –

1. Soient  $C, D \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $C$  et  $D$  pour que  $f$  se prolonge par continuité en 0. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté  $f$ , est alors dérivable en 0 et que  $f'$  est continue en 0.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $C$  et  $D$  pour que  $f$  se prolonge par continuité en 0.

3. Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté  $f$ , est alors dérivable en 0 et que  $f'$  est continue en 0.

4. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, 0[$ .

5. Résoudre l'équation précédente sur  $\mathbb{R}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[258]

### Exercice 3 ★★ Raccordement des solutions- tous les cas possibles –

Déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes :

1.  $ty' - 2y = t^3$  ;
2.  $t^2 y' - y = 0$  ;
3.  $(1-t)y' - y = t$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[259]

### Exercice 4 ★★ Dissolution d'un composé chimique –

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Combien de temps faut-il encore attendre pour qu'il reste seulement 1g ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[268]

### Exercice 5 ★★ Recherche de courbes –

Trouver les courbes d'équation  $y = f(x)$ , avec  $f$  de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  vérifiant la propriété géométrique suivante : si  $M$  est un point quelconque de la courbe,  $T$  l'intersection de la tangente à la courbe en  $M$  avec l'axe  $(Ox)$ , et  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(Ox)$ , alors  $O$  est le milieu de  $[PT]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[269]

---

**Exercice 6** ★★ **Le vecteur sous-tangent –**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f'$  ne s'annule pas. Soit  $M$  un point de la courbe représentative  $C_f$  de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $T$  le point d'intersection de la tangente à  $C_f$  au point  $M$  avec l'axe  $(O, \vec{i})$  et  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $(O, \vec{i})$ . On appelle vecteur sous-tangent à  $C_f$  en  $M$  le vecteur  $\overrightarrow{TP}$ . Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (dérivables, et dont la dérivée ne s'annule pas) dont les vecteurs sous-tangents en tout point de  $C_f$  sont égaux à un vecteur constant.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[270]

---

**Exercice 7** ★★★ **Une équation fonctionnelle –**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et vérifiant, pour tous  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(s+t) = f(s)f(t).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[271]

---

**Exercice 8** ★★★★★ **Où est l'équation différentielle ? –**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[272]

---

**Exercice 9** ★★★★★ **Calcul d'une transformée de Fourier par résolution d'une équation différentielle –**

En formant une équation différentielle vérifiée par  $f$ , calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[275]

---

**Exercice 10** ★★ **Comportement à l'infini d'une solution –**

Prouver que toute solution de l'équation différentielle  $y' + e^{x^2} y = 0$  admet une limite nulle en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[280]

---

**Exercice 11** ★★★★★ **Solutions impaires –**

Soit  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues avec  $a$  impaire et  $b$  paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[284]

---

**Exercice 12** ★ **Solutions bornées –**

Soit  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et intégrable. Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle  $y'(t) - a(t)y(t) = 0$  sont bornées.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[278]

## 2 Equations du second ordre

### Exercice 13 ★★ Équations du second ordre à coefficients constants - second membre exponentiel\*polynôme –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$ ;
2.  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$ ;
3.  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$ ;
4.  $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos x$ ;
5.  $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin(2x)$ ;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[240]

### Exercice 14 ★★★★★ Avec une condition initiale –

Pour les équations différentielles suivantes, déterminer l'unique fonction solution :

1.  $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ , avec  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 0$ .
2.  $y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2) \cos(mx)$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ ; on discutera suivant que  $m = 0$  ou  $m \neq 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[238]

### Exercice 15 ★★ Solutions polynômiales –

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2 - 3)y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur  $\mathbb{R}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[246]

### Exercice 16 ★★ Abaissement de l'ordre –

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2 + t)x'' + (t - 1)x' - x = 0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur  $]1, +\infty[$ .
3. Reprendre le même exercice avec

$$t^2 x'' - 3tx' + 4x = t^3$$

dont on déterminera les solutions sur  $]0, +\infty[$ . On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[244]

### Exercice 17 ★★ Avec des séries entières –

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \quad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$ .

1. Question préliminaire : soient  $a, b, c, d$  4 réels et  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} a \cos(x^2) + b \sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c \cos(x^2) + d \sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A quelle condition sur  $a, b, c, d$  la fonction  $f$  se prolonge-t-elle en une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  ? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par  $R$  son rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre  $a_{n+4}$  et  $a_n$ .
3. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p+1}$  et  $a_{4p+3}$ .
4. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $a_{4p}$  en fonction de  $a_0$  et de  $p$  (respectivement  $a_{4p+2}$  en fonction de  $a_2$  et  $p$ ).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit  $S$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Préciser une base de  $S$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[247]

### Exercice 18 ★★★★★ Solutions DSE puis abaissement de l'ordre –

Pour les équations différentielles suivantes :

Chercher les solutions développables en séries entières Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode d'abaissement de l'ordre Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}$ .

$$1. xy'' + 2y' - xy = 0 \quad 2. x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[248]

### Exercice 19 ★★★★★ DSE –

Soit  $(E)$  l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions classiques.
2. A l'aide d'un changement de variables, résoudre l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .
3. En déduire toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[249]

### Exercice 20 ★★★★★ Avec de l'algèbre linéaire –

Soit  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit  $\phi : E \rightarrow E$  par

$$\begin{aligned} \phi(f) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f'(t) + tf(t). \end{aligned}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\phi$ .
2. Faire de même pour  $\phi^2$ .
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[245]

### Exercice 21 ★★★★★ Problème inverse –

Soit  $I$  un intervalle,  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que l'application  $w$ , définie par  $w = y_1y_2' - y_1'y_2$  ne s'annule pas. Démontrer qu'il existe un unique couple  $(p, q)$  d'applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $y_1$  et  $y_2$  soient solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $y'' + py' + qy = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[253]

### Exercice 22 ★★★★★ Changement de variables –

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 3xy' + 4y = 0. (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?

2. Analyse. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $z(t) = y(e^t)$ .

Calculer pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z'(t)$  et  $z''(t)$ . En déduire que  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser  $x = e^t$  dans  $(E)$ ). Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente. En déduire le "portrait robot" de  $y$ .

3. Calculer pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z'(t)$  et  $z''(t)$ .

4. En déduire que  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser  $x = e^t$  dans  $(E)$ ).

5. Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

6. En déduire le "portrait robot" de  $y$ .

7. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de  $(E)$  et conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1458]

### Exercice 23 ★★ Nombre fini de zéros –

On considère l'équation différentielle  $y''(t) + b(t)y(t) = 0$  où  $b$  désigne une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère  $y$  une solution non identiquement nulle de cette équation et on souhaite démontrer que, pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , le nombre de zéros de  $y$  dans  $[\alpha, \beta]$  est fini. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution  $y$  qui possède un nombre infini de zéros dans  $[\alpha, \beta]$ .

1. Démontrer qu'il existe dans  $[\alpha, \beta]$  une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de zéros de  $y$  deux à deux distincts convergeant vers un réel  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ .

2. Démontrer que  $y(\gamma) = 0$ .

3. Démontrer que, à partir d'un certain rang, le quotient  $T_n = \frac{y(z_n)y'(\gamma)}{z_n - \gamma}$  est bien défini et que  $y'(\gamma) = 0$ .

4. En déduire que la solution  $y$  est nécessairement identiquement nulle et conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1493]

### Exercice 24 ★★★ Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coefficients constants... –

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$  en posant  $z(x) = (1 + e^x)y(x)$  ;

2.  $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$ , en posant  $z = xy$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[241]

### Exercice 25 ★★★ Changement de variable - et on retrouve des coefficients constants... –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$  en posant  $t = e^x$  ;

2.  $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0$  en posant  $t = \sin x$  ;

3.  $x^2y'' + y = 0$  en posant  $t = \ln x$  ;

4.  $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$  sur  $] -1, 1[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[242]

### Exercice 26 ★★★ Varions la constante... –

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$  ;

2.  $y'' + 4y = \tan t$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[243]

### Exercice 27 ★★ Solution qui s'annule –

Soit  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue non identiquement nulle. On se propose de démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle  $y''(x) + p(x)y(x) = 0$  s'annulent. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que  $f$  est une solution ne s'annulant pas.

1. Justifier que  $f$  est de signe constant. Dans la suite, quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on supposera  $f > 0$ .
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$  quelconque. Justifier que la courbe représentative de  $f$  est en-dessous de sa tangente en  $(a, f(a))$ .
3. En déduire que  $f'(a) = 0$ .
4. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[277]

### Exercice 28 Solutions périodiques d'équations différentielles –

Dans cet exercice,  $I$  désigne un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  symétrique par rapport à l'origine, et  $\varphi$  une fonction paire, de classe  $C^\infty$  sur  $I$ . On note  $(E)$  l'équation différentielle homogène

$$y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

On note  $f_0$  l'unique solution de  $(E)$  sur  $I$  vérifiant les conditions initiales  $f_0(0) = 1$  et  $f'_0(0) = 0$ , et  $f_1$  l'unique solution vérifiant les conditions initiales  $f_1(0) = 0$  et  $f'_1(0) = 1$ .

1. Démontrer que si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ , alors  $y$  est de classe  $C^\infty$ . Démontrer que si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ , alors  $x \mapsto y(-x)$  est aussi solution de  $(E)$  sur  $I$ . En déduire que  $f_0$  est une fonction paire et que  $f_1$  est une fonction impaire. Exprimer la solution générale de  $(E)$  sur  $I$  à l'aide de  $f_0$  et de  $f_1$ . En déduire, parmi les solutions de  $(E)$ , celles qui sont paires et celles qui sont impaires.
2. Démontrer que si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ , alors  $y$  est de classe  $C^\infty$ .
3. Démontrer que si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ , alors  $x \mapsto y(-x)$  est aussi solution de  $(E)$  sur  $I$ .
4. En déduire que  $f_0$  est une fonction paire et que  $f_1$  est une fonction impaire.
5. Exprimer la solution générale de  $(E)$  sur  $I$  à l'aide de  $f_0$  et de  $f_1$ . En déduire, parmi les solutions de  $(E)$ , celles qui sont paires et celles qui sont impaires.
6. On suppose désormais que  $I = \mathbb{R}$  et que  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique.

Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $x \mapsto y(x + 2\pi)$  est encore solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . En déduire qu'il existe des constantes  $w_{00}, w_{01}, w_{10}$  et  $w_{11}$ , que l'on déterminera en fonction des valeurs prises par  $f_0, f'_0, f_1$  et  $f'_1$  en  $2\pi$ , telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait

$$\begin{cases} f_0(x + 2\pi) &= w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \\ f_1(x + 2\pi) &= w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x). \end{cases}$$

Soit  $W$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par  $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$ . Montrer que, pour que  $(E)$  admette sur  $\mathbb{R}$  des solutions non identiquement nulles  $2\pi$ -périodiques, il faut et il suffit que  $W$  admette 1 pour valeur propre. On pourra exprimer une telle solution  $g$  en fonction de  $f_0$  et  $f_1$ , puis utiliser la périodicité de  $g$ .

7. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $x \mapsto y(x + 2\pi)$  est encore solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
8. En déduire qu'il existe des constantes  $w_{00}, w_{01}, w_{10}$  et  $w_{11}$ , que l'on déterminera en fonction des valeurs prises par  $f_0, f'_0, f_1$  et  $f'_1$  en  $2\pi$ , telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait

$$\begin{cases} f_0(x + 2\pi) &= w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \\ f_1(x + 2\pi) &= w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x). \end{cases}$$

9. Soit  $W$  la matrice carrée d'ordre 2 définie par  $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$ . Montrer que, pour que  $(E)$  admette sur  $\mathbb{R}$  des solutions non identiquement nulles  $2\pi$ -périodiques, il faut et il suffit que  $W$  admette 1 pour valeur propre. On pourra exprimer une telle solution  $g$  en fonction de  $f_0$  et  $f_1$ , puis utiliser la périodicité de  $g$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[285]

### Exercice 29 Sur les zéros des solutions d'une équation différentielle –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit qu'un réel  $a$  est un *zéro isolé* de  $f$  si  $f(a) = 0$  et s'il n'existe pas de suite  $(a_n)$  de zéros distincts de  $f$  telle que  $(a_n)$  converge vers  $a$ .

1. Donner un exemple de fonction continue dont 0 est un zéro non-isolé.

2. On suppose que  $f$  est dérivable, et que  $a$  est un zéro de  $f$  non-isolé. Prouver que  $f'(a) = 0$ .

3. On suppose toujours que  $f$  est dérivable et que les zéros de  $f$  sont isolés. Soient  $a$  et  $b$  deux zéros consécutifs de  $f$ . Démontrer que  $f'(a)$  et  $f'(b)$  ont des signes opposés.

Dans la suite de l'exercice, on fixe  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues, et on considère l'équation différentielle  $(E)$  :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

4. Soit  $f$  une solution non-nulle de  $(E)$ . En utilisant 2., prouver que les zéros de  $f$  sont isolés.

5. Soient  $f$  et  $g$  deux solutions de  $(E)$  et  $t_0, C \in \mathbb{R}$  tels que  $g(t_0) = Cf(t_0)$  et  $g'(t_0) = Cf'(t_0)$ . Prouver que  $g = Cf$ .

6. On suppose désormais que  $(f, g)$  est une base de solutions de  $(E)$ . On appelle wronskien de  $f$  et  $g$  la fonction  $W$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que  $W$  ne s'annule jamais.

7. Former une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $W$  et en déduire l'expression de  $W(t)$  en fonction de  $W(t_0)$ .

8. Soient  $a, b$  deux zéros consécutifs de  $f$ . Que vaut  $W(a), W(b)$  ? En utilisant les questions précédentes, en déduire que  $g$  s'annule sur  $[a, b]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[291]

### Exercice 30 ★★★★★ Solutions bornées –

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue intégrable. On considère l'équation  $y'' + f(t)y = 0$ .

1. Soit  $y$  une solution bornée de l'équation. Montrer que  $y'$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

2. Soit  $y_1, y_2$  deux solutions. Montrer que leur déterminant wronskien  $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$  est constant.

3. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[282]

### Exercice 31 ★★★★★ Principe d'entrelacement des zéros de Sturm –

Le but de cet exercice est de donner des indications "qualitatives" sur le nombre et la place des zéros de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre. On fixe  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.

1. Une seule équation. On considère l'équation différentielle  $(E)$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Soit  $f$  une solution non-nulle de  $(E)$ . Montrer que les zéros de  $f$  sont isolés. Soient  $f, g$  deux solutions indépendantes de  $(E)$ . On appelle wronskien de  $f$  et  $g$  la fonction  $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ .

Montrer que  $W(t) = W(t_0) \exp(-\int_{t_0}^t p(u)du)$ . Montrer que  $W(t_0) \neq 0$ . En déduire que si  $\alpha < \beta$  sont deux zéros consécutifs de  $f$ , alors il existe  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  tel que  $g(\gamma) = 0$ .

2. Soit  $f$  une solution non-nulle de  $(E)$ . Montrer que les zéros de  $f$  sont isolés.

3. Soient  $f, g$  deux solutions indépendantes de  $(E)$ . On appelle wronskien de  $f$  et  $g$  la fonction  $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ .

Montrer que  $W(t) = W(t_0) \exp(-\int_{t_0}^t p(u)du)$ . Montrer que  $W(t_0) \neq 0$ . En déduire que si  $\alpha < \beta$  sont deux zéros consécutifs de  $f$ , alors il existe  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  tel que  $g(\gamma) = 0$ .

4. Montrer que  $W(t) = W(t_0) \exp(-\int_{t_0}^t p(u)du)$ .

5. Montrer que  $W(t_0) \neq 0$ .

6. En déduire que si  $\alpha < \beta$  sont deux zéros consécutifs de  $f$ , alors il existe  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  tel que  $g(\gamma) = 0$ .

7. Deux équations. On suppose désormais que l'on a deux équations du second ordre

$$(E_1) : y'' + p(t)y = 0$$

$$(E_2) : y'' + q(t)y = 0$$

avec  $p \leq q$ . On considère  $f$  (resp.  $g$ ) une solution non-identiquement nulle de  $(E_1)$  (resp. de  $E_2$ ). Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux zéros consécutifs de  $f$ , alors il existe  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  tel que  $g(\gamma) = 0$ .

8. Comparaison à un cas classique. Soit l'équation  $y'' + q(t)y = 0$ , et  $f$  une solution non-identiquement nulle de cette équation. Montrer que

si  $q(t) \leq M^2$ , alors deux zéros consécutifs de  $f$  sont distants d'au moins  $\pi/M$ ; si  $q(t) \geq M^2$ , alors dans tout intervalle  $I$  de longueur  $\pi/M$ ,  $f$  admet au moins un zéro dans  $I$ .

9. si  $q(t) \leq M^2$ , alors deux zéros consécutifs de  $f$  sont distants d'au moins  $\pi/M$ ;

10. si  $q(t) \geq M^2$ , alors dans tout intervalle  $I$  de longueur  $\pi/M$ ,  $f$  admet au moins un zéro dans  $I$ .

11. Équation de Bessel. On considère l'équation différentielle suivante, dite équation de Bessel :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0,$$

définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

Effectuer le changement de fonction inconnue  $y = v/\sqrt{x}$ , et ramener cette équation à une équation de la forme précédente. Discuter, suivant la valeur de  $\lambda$ , le nombre de zéros d'une solution non-nulle de l'équation de Bessel dans un intervalle de longueur  $\pi$ .

12. Effectuer le changement de fonction inconnue  $y = v/\sqrt{x}$ , et ramener cette équation à une équation de la forme précédente.

13. Discuter, suivant la valeur de  $\lambda$ , le nombre de zéros d'une solution non-nulle de l'équation de Bessel dans un intervalle de longueur  $\pi$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[288]

### 3 Ordre plus grand

#### Exercice 32 ★★★★★ Fonction non-solution d'une équation différentielle –

Démontrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(t) = e^{-1/t^2}$  et prolongée par  $f(0) = 0$  est de classe  $C^\infty$ , mais n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[281]

#### Exercice 33 ★★★★★ Zéros isolés –

Soient  $a_1, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation  $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$  a ses zéros isolés.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[286]

### 4 Systèmes différentiels

#### Exercice 34 ★★★★★ Diagonalisable! –

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$1. \begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[293]

#### Exercice 35 ★★★★★ Diagonalisable...mais sur les complexes –



Donner les solutions réelles du système différentiel  $X' = AX$  lorsque

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[294]

### Exercice 36 ★★★★★ Systèmes non diagonalisables –

Résoudre le système différentiel  $X' = AX$  lorsque

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[309]

### Exercice 37 ★★★★★ Avec second membre –

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$1. \begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + t. \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[312]

### Exercice 38 ★★★★★ Coefficients non constants –

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[313]

### Exercice 39 ★★★★★ Ordre plus grand –

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[315]

### Exercice 40 ★★★★★ Comportement à l'infini des systèmes 2x2 –

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système  $X'(t) = AX(t)$  tendent vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes de partie réelle strictement négative.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[316]

### Exercice 41 ★★★★★ Toutes les solutions sont de norme constante –

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Démontrer l'équivalence de

1.  $A$  est antisymétrique ;
2. toutes les solutions de l'équation  $X' = AX$  sont de norme constante.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[289]

## 5 Exponentielle de matrice

### Exercice 42 ★ Déterminant de l'exponentielle d'une matrice –

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Démontrer que  $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{Tr} A)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3514]

### Exercice 43 ★ Matrice antisymétrique et exponentielle –

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique. Démontrer que  $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3516]

### Exercice 44 ★★ Exponentielle d'une matrice non diagonalisable –

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ . Démontrer que  $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3517]

### Exercice 45 ★★★ Exponentielle d'une matrice avec un polynôme annulateur –

Soit  $n \geq 1$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ .

1. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $A^k$  en fonction de  $A$  et de  $I_n$ .
2. En déduire l'expression de  $\exp(A)$  en fonction de  $A$  et de  $I_n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3520]

### Exercice 46 ★★★★★ Exponentielle d'une matrice trigonalisable –

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3515]

### Exercice 47 ★★★ Avec l'exponentielle de matrice –

Soit  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. En déduire la valeur de  $\exp(tA)$ .
3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[310]

### Exercice 48 ★★★★★ Avec l'exponentielle de matrice –

Soit  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$ . En déduire la solution générale du système  $X' = AX$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[311]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Comme le titre de l'exercice l'indique, on résout d'abord l'équation sans second membre, puis on cherche une solution par la méthode de variation de la constante.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

1. Chercher la limite à droite et à gauche en 0. Vérifier la dérivabilité à droite et à gauche en 0.
  2. Chercher la limite à droite et à gauche en 0.
  3. Vérifier la dérivabilité à droite et à gauche en 0.
  - 4.
  5. Si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , elle est solution sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$ . On doit recoller les bouts par continuité (et même dérivabilité) en 0.
- 

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Les trois équations ont en commun que le terme devant  $y'$  s'annule. Il faut donc résoudre l'équation sur des intervalles où cette fonction ne s'annule pas (par exemple,  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, 0[$  pour la première équation), puis étudier si les solutions se recollent correctement (ie si en recollant une solution sur  $]0, +\infty[$  et une solution sur  $] -\infty, 0[$  on peut obtenir une solution  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Noter  $x(t)$  la quantité restante en fonction du temps et former une équation différentielle vérifiée par  $x$ .

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Écrire l'équation de la tangente, trouver les coordonnées du point  $T$ , du point  $P$  et en déduire une équation différentielle vérifiée par  $f$ .

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Prendre un point  $M = (t, f(t))$  sur la courbe et calculer les coordonnées de  $T$  et de  $P$ .

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Dériver la relation précédente par rapport à  $t$ .

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

Poser  $g = f + f'$ . Alors  $f$  est solution de  $f + f' = g$ . Résoudre cette équation, et conclure.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Dériver  $f$  puis faire une intégration par parties pour trouver l'équation différentielle vérifiée.

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Écrire la forme "théorique" de la solution.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Que vaut une fonction impaire en 0? Penser ensuite à l'existence et à l'unicité au problème de Cauchy.

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Écrire la forme d'une solution.

---

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Résoudre l'équation homogène en introduisant l'équation caractéristique. Puis chercher une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions, puis en cherchant des solutions sous la forme d'une exponentielle-polynôme.

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

1. Appliquer la méthode usuelle de résolution, et ajuster les constantes à la condition initiale.
  2. C'est la même chose, mais il faut être attentif dans les calculs.
- 

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Étudier quel doit être le degré d'un polynôme qui est solution. Pour cela, on se concentrera sur le coefficient dominant.

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

1. Commencer par déterminer le degré d'une solution polynomiale.
  2. Utiliser la méthode d'abaissement de l'ordre, en posant  $y(t) = \frac{x(t)}{t-1}$ .
- 

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

1. Étudier les conditions qu'impose la continuité de  $f$ , de  $f'$  et de  $f''$  en 0 sur les coefficients  $a, b, c, d$ .
  2. Introduire cette solution dans l'équation différentielle, mettre tout sous la forme d'une seule somme et identifier.
  3. Que valent  $a_1$  et  $a_3$  ?
  - 4.
  - 5.
  6. Il faut raccorder les solutions en s'aidant de la question préliminaire !
- 

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

Chercher une solution développable en série entière sous la forme  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(a_n)$ , en déduire la valeur de  $a_n$  pour chaque  $n$ . On doit pouvoir identifier avec une fonction classique. On utilise ensuite la méthode d'abaissement de l'ordre pour trouver la solution générale. On pose  $y(x) = f(x)z(x)$  où  $f$  est une solution.  $z'$  vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on doit intégrer.

---

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

1. Le début est classique. Pour identifier à des fonctions classiques, écrire les DSE de  $\cos(x^\alpha)$  et  $\cosh(x^\alpha)$ .
  2. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , le changement de variables est  $t = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ .
  3. On connaît l'expression de la solution sur  $]0, +\infty[$ , sur  $] -\infty, 0[$ , il faut recoller (la solution doit être  $C^2$ ).
- 

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

1. L'équation  $\phi(f) = \lambda f$  revient à résoudre une équation différentielle simple. Elle a toujours une solution.
  2. Utiliser le théorème de décomposition des noyaux pour calculer  $\ker(\phi^2 - \lambda^2 Id)$ . On distinguera le cas  $\lambda = 0$ .
  3. L'équation correspond à  $\phi^2(y) = -2y$ .
- 

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

---

Procéder par analyse/synthèse. Écrire que  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions, et résoudre le système pour déterminer  $p$  et  $q$ .

---

#### Indication pour l'exercice 22 ▲

---

- 1.
  2. Dérivée d'une fonction composée. Exprimer  $y'(e^t)$  et  $y'''(e^t)$  en fonction de  $z'(e^t)$  et de  $z''(e^t)$ , et remplacer dans  $(E)$  (où on a déjà remplacé  $x$  par  $e^t$ ). Relire son cours ! On revient à  $y$  par  $y(x) = z(\ln t)$ .
  3. Dérivée d'une fonction composée.
  4. Exprimer  $y'(e^t)$  et  $y'''(e^t)$  en fonction de  $z'(e^t)$  et de  $z''(e^t)$ , et remplacer dans  $(E)$  (où on a déjà remplacé  $x$  par  $e^t$ ).
  5. Relire son cours !
  6. On revient à  $y$  par  $y(x) = z(\ln t)$ .
  - 7.
- 

#### Indication pour l'exercice 23 ▲

---

1. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
  - 2.
  - 3.
  4. Unicité dans le théorème de Cauchy.
- 

#### Indication pour l'exercice 24 ▲

---

Dans chaque cas,  $z$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Trouver  $z$  et en déduire  $y$ . Pour la deuxième équation, attention aux problèmes de raccordement de solution.

---

#### Indication pour l'exercice 25 ▲

---

1. Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}$  et trouver une équation différentielle vérifiée par  $z(t) = y(x)$ , soit  $y(x) = z(e^x)$ .
  2. Résoudre l'équation sur  $] -\pi/2, \pi/2[$  et trouver une équation différentielle vérifiée par  $z(t) = y(x)$ .
  3. Résoudre l'équation sur  $]0, +\infty[$ , et trouver une équation différentielle vérifiée par  $z(t) = y(e^t)$ .
  4. Poser  $x = \sin t$ .
- 

#### Indication pour l'exercice 26 ▲

---

Résoudre d'abord l'équation homogène puis chercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante (en prenant compte qu'il s'agit d'une

---

#### Indication pour l'exercice 27 ▲

---

1. Théorème des valeurs intermédiaires.
  2. Convexité.
  3.  $f$  ne s'annule pas.
  4. Quelles sont les solutions constantes ?
- 

#### Indication pour l'exercice 28 ▲

---

#### Indication pour l'exercice 29 ▲

---

- 1.
2. Considérer le taux d'accroissement entre  $a$  et un autre zéro.
- 3.
4. Utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy d'une équation du second ordre.
5. Idem.
- 6.

7. Calculer le déterminant, le dériver et utiliser le fait que  $f$  et  $g$  sont des solutions de l'équation différentielle.
  8. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à  $g$ .
- 

#### Indication pour l'exercice 30 ▲

---

1. Montrer d'abord que  $y'$  admet une limite (intégrer  $y''$ ), puis prouver que cette limite est nécessairement nulle.
  2. Dériver  $W$ .
  3. Considérer deux solutions indépendantes bornées, et prendre la limite du wronskien en l'infini.
- 

#### Indication pour l'exercice 31 ▲

---

1. Si  $f(a) = 0$ , alors  $f'(a) \neq 0$  et utiliser la formule de Taylor-Young.  
Dériver le wronskien. Utiliser le fait que  $f$  et  $g$  sont indépendantes, et interpréter le wronskien comme un déterminant. Le wronskien ne change pas de signe, et  $f'(\alpha)$ ,  $f'(\beta)$  sont de signes opposés.
  2. Si  $f(a) = 0$ , alors  $f'(a) \neq 0$  et utiliser la formule de Taylor-Young.
  3. Dériver le wronskien. Utiliser le fait que  $f$  et  $g$  sont indépendantes, et interpréter le wronskien comme un déterminant. Le wronskien ne change pas de signe, et  $f'(\alpha)$ ,  $f'(\beta)$  sont de signes opposés.
  4. Dériver le wronskien.
  5. Utiliser le fait que  $f$  et  $g$  sont indépendantes, et interpréter le wronskien comme un déterminant.
  6. Le wronskien ne change pas de signe, et  $f'(\alpha)$ ,  $f'(\beta)$  sont de signes opposés.
  7. Introduire le "pseudo-wronskien" défini par  $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ , et montrer qu'il est monotone sur  $] \alpha, \beta[$ . Montrer que ceci est incompatible avec  $g > 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ .
  8. Comparer à l'équation  $y'' + M^2y = 0$ , et à la solution  $t \mapsto \sin(Mt + \theta)$  où  $\theta$  est bien choisi.
  9. La discussion se fait selon  $4\lambda^2 - 1 \geq 0$  ou non...
  - 10.
  11. La discussion se fait selon  $4\lambda^2 - 1 \geq 0$  ou non...
- 

#### Indication pour l'exercice 32 ▲

---

Calculer les dérivées successives de  $f$  en 0.

---

#### Indication pour l'exercice 33 ▲

---

Soit  $y$  une solution non-nulle, et  $t$  un zéro de  $y$ . Puisque 0 est solution de  $y$ , que peut-on dire de  $y$  et de ses dérivées successives de  $y$  en  $t$ ? Puis utiliser la formule de Taylor-Young en  $t$ .

---

#### Indication pour l'exercice 34 ▲

---

Introduire la matrice  $A$  telle que  $X' = AX$ . Réduire cette matrice  $A$  (elle est diagonalisable dans les deux cas), en déduire les solutions.

---

#### Indication pour l'exercice 35 ▲

---

Chercher les valeurs propres : une est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées. Résoudre le système sur  $\mathbb{C}$  puis prendre la partie réelle.

---

#### Indication pour l'exercice 36 ▲

---

Rechercher les valeurs propres de la matrice, ses espaces propres. La matrice n'est pas diagonalisable? Tant pis, on la trigonalise et on se ramène à résoudre un système triangulaire.

---

#### Indication pour l'exercice 37 ▲

---

1. Introduire la matrice  $A$  du système et la diagonaliser. Introduire ensuite le vecteur  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  tel que  $X(t) = PY(t)$  (où  $P$  est la matrice de passage à la base qui diagonalise  $A$ ), et résoudre le système (diagonal) vérifié par  $Y(t)$ .

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est que trigonalisable. On obtient un système triangulaire, qu'on résout de bas en haut.

---

#### Indication pour l'exercice 38 ▲

Si on écrit le système  $X'(t) = A(t)X(t)$ , alors la matrice  $A(t)$  se diagonalise avec une matrice de passage indépendante de  $t$ . Ainsi, on peut résoudre ce système presque comme s'il était à coefficients constants.

---

#### Indication pour l'exercice 39 ▲

Introduire le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et écrire que  $X$  est solution d'un système d'ordre 1, ou bien faire un changement de fonctions inconnues (bien regarder la forme du système).

---

#### Indication pour l'exercice 40 ▲

Réduire la matrice  $A$ . Deux cas sont possibles. Elle est diagonalisable, ou trigonalisable.

---

#### Indication pour l'exercice 41 ▲

Poser  $Y = X^T X$  et dériver  $Y$  ( $Y$  est une fonction constante).

---

#### Indication pour l'exercice 42 ▲

Raisonner à l'aide des valeurs propres.

---

#### Indication pour l'exercice 43 ▲

Calculer  $\exp(A)\exp(A^T)$  en utilisant que  $A$  est antisymétrique.

---

#### Indication pour l'exercice 44 ▲

Donner une formule pour  $A^{2n}$  et  $A^{2n+1}$ .

---

#### Indication pour l'exercice 45 ▲

1. Commencer par calculer le reste dans la division euclidienne de  $X^k$  par  $X^2 - 3X + 2$  (on pourra utiliser que les racines de ce dernier polynôme sont 1 et 2).

2. Appliquer la définition.

---

#### Indication pour l'exercice 46 ▲

Écrire  $A = PTP^{-1}$  où  $T$  est triangulaire supérieure, puis calculer  $\exp(T)$  en écrivant  $T = D + N$ , où  $D$  est diagonale et  $N$  est nilpotente.

---

#### Indication pour l'exercice 47 ▲

1.

2. Poser  $N = A - I_3$  et calculer  $\exp(tN)$  en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.

3. Appliquer directement la formule avec l'exponentielle de matrice.

---

---

**Indication pour l'exercice 48 ▲**

---

Introduire  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et calculer  $B^n$ . Ecrire ensuite  $A$  en fonction de  $I_3$  et des puissances de  $B$ .

---



## Correction de l'exercice 1 ▲

Avant de commencer, on pourra consulter la vidéo suivante présentant la méthode de variation de la constante.

1. On commence par résoudre l'équation homogène  $y' + y = 0$  dont la solution générale est  $y(x) = \lambda e^{-x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$ , de sorte que  $y'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$ . On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}.$$

Après simplification, ceci donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donnée par  $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$ . Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène  $(1+x)y' + y = 0$ , dont la solution générale est donnée par  $y(x) = \frac{\lambda}{1+x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant  $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$ , de sorte que

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}.$$

En introduisant ceci dans l'équation différentielle, on trouve

$$(1+x) \left( \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2} \right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x)$$

ce qui donne après simplifications

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par  $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$ , et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre  $y' - \frac{y}{x} = 0$ . On remarque que  $x \mapsto x$  est une solution. Les solutions de l'équation sans second membre sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche ensuite une solution particulière sous la forme  $y(x) = \lambda(x)x$ . Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation  $\lambda'(x) = x$ , ce qui donne  $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$ . Puisqu'on cherchait les solutions s'écrivant  $\lambda(x)x$ , on obtient donc que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donné par les fonctions

$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}, C \in \mathbb{R}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène  $y' - 2xy = 0$ . Pour chercher une solution, on peut remarquer que si  $y$  est une solution qui ne s'annule pas,

$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C.$$

Ainsi, ceci nous conduit à observer que  $x \mapsto e^{x^2}$  est solution de l'équation homogène et donc que la solution générale de l'équation homogène est  $x \mapsto \lambda e^{x^2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc  $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$  et introduisant  $y$  dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une primitive est donnée par  $\lambda(x) = e^{-x^2+x}$  et donc une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x} e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions  $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

5. On commence par résoudre l'équation homogène  $y' - \frac{2}{t}y = 0$ . On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme  $y(t) = \lambda t^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant  $y(t) = \lambda(t)t^2$ . L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors,  $\lambda'(t) = 1$  soit  $\lambda(t) = t + C$ . Finalement, les solutions sur  $]0, +\infty[$  de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2, C \in \mathbb{R}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. Il est clair que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , indépendamment de la valeur de  $C$ , et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pm\infty$  si  $D \neq 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  si  $D = 0$ . Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si  $D = 0$ . Dans ce cas, on a  $f(0) = 0$ . On suppose donc que  $D = 0$ . La fonction  $f$  étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour  $x > 0$ , on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x} \exp(-1/x).$$

Posons  $u = \frac{1}{x}$ . Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $u$  tend vers  $+\infty$  et

$$\frac{1}{x} \exp(-1/x) = u \exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynômes et exponentielle, on en déduit que  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ , et donc  $f'$  est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que  $f$  est dérivable en 0, avec  $f'(0) = 0$ . La continuité à gauche de  $f'$  en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2} \exp(-1/x) = Cu^2 \exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ , et donc que  $f'$  est continue en 0.

2. Il est clair que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , indépendamment de la valeur de  $C$ , et que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pm\infty$  si  $D \neq 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  si  $D = 0$ . Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si  $D = 0$ . Dans ce cas, on a  $f(0) = 0$ .

3. On suppose donc que  $D = 0$ . La fonction  $f$  étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour  $x > 0$ , on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x} \exp(-1/x).$$

Posons  $u = \frac{1}{x}$ . Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $u$  tend vers  $+\infty$  et

$$\frac{1}{x} \exp(-1/x) = u \exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynômes et exponentielle, on en déduit que  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ , et donc  $f'$  est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que  $f$  est dérivable en 0,

avec  $f'(0) = 0$ . La continuité à gauche de  $f'$  en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2} \exp(-1/x) = Cu^2 \exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ , et donc que  $f'$  est continue en 0.

4. Sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , la fonction  $x^2$  ne s'annule pas et l'équation est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x^2} y.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions  $y(x) = C \exp(-1/x)$ , où  $C \in \mathbb{R}$ . La résolution sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$  donne exactement le même ensemble de solutions.

5. Soit  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Sa restriction à  $]0, +\infty[$  est solution sur  $]0, +\infty[$ , et donc il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x > 0$ ,  $y(x) = C \exp(-1/x)$ . La restriction de  $y$  à  $] -\infty, 0[$  est aussi solution sur  $] -\infty, 0[$ , et donc il existe une constante  $D \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x < 0$ ,  $y(x) = D \exp(-1/x)$ . Remarquons ici que  $C$  et  $D$  n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  se font totalement indépendamment. D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que  $y$  soit continue en 0, il est nécessaire que  $D = 0$ . Dans ce cas, la fonction  $y$  est de classe  $C^1$ , et elle vérifie bien l'équation différentielle : c'est clair pour  $x \neq 0$ , et c'est aussi vrai en 0 par continuité de  $y$  et  $y'$  en 0.

### Correction de l'exercice 3 ▲

Les trois équations ont en commun que le terme devant  $y'$  s'annule. Il faut donc résoudre l'équation sur des intervalles où cette fonction ne s'annule pas (par exemple,  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, 0[$  pour la première équation), puis étudier si les solutions se recollent correctement (ie si en "collant" une solution sur  $]0, +\infty[$  et une solution sur  $] -\infty, 0[$  on peut obtenir une solution  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

1.  $ty' - 2y = t^3$  : sur  $]0, +\infty[$ , on résout d'abord l'équation sans second membre

$$ty' - 2y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{2}{t}$$

et donc les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme  $y(t) = \lambda t^2$ . Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, ou remarquer plus facilement que  $t \mapsto t^3$  est solution. Une fonction  $y$  est donc solution de l'équation sur  $]0, +\infty[$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = \lambda t^2 + t^3$ . De même, une fonction  $y$  est donc solution de l'équation sur  $] -\infty, 0[$  si et seulement s'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t) = \mu t^2 + t^3$ . Essayons maintenant de résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}$ . Si  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est solution de l'équation sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On veut que  $y$  soit continue en 0. Mais on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0.$$

$y$  ainsi définie et prolongée par  $y(0) = 0$  est bien continue en 0. De même, il faut que  $y$  soit dérivable en 0. Mais,  $y$  est dérivable à droite en 0, et  $y'_d(0) = 0$  (c'est la dérivée de  $t \mapsto \lambda t^2 + t^3$  en 0), et  $y$  est dérivable à gauche en 0 avec  $y'_g(0) = 0$ . Ainsi, la formule précédente définit bien une fonction  $y$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $y$  est solution de l'équation. On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 2.

2.  $t^2 y' - y = 0$  : On résout d'abord l'équation sur  $]0, +\infty[$ . Elle est équivalente à  $y'/y = \frac{1}{t^2}$ , ce qui nous dit qu'une fonction  $y$  est solution sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $y(t) = \lambda e^{-1/t}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De même, une fonction  $y$  est solution sur  $] -\infty, 0[$  si et seulement si  $y(t) = \mu e^{-1/t}$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si on cherche maintenant une solution  $y$  sur  $\mathbb{R}$ , ses restrictions à  $]0, +\infty[$  et à  $] -\infty, 0[$  sont aussi solutions, et il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ \mu e^{-1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On étudie la continuité éventuelle de  $y$  en 0. On a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda e^{-1/t} = 0,$$

tandis que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu e^{-1/t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu > 0 \\ -\infty & \text{si } \mu < 0 \\ 0 & \text{si } \mu = 0. \end{cases}$$

Pour assurer la continuité de  $y$  en 0, il est donc nécessaire que  $\mu = 0$  et on prolonge  $y$  par continuité en 0 en posant  $y(0) = 0$ . Mais alors, pour  $t > 0$ , on a

$$y'(t) = \frac{\lambda}{t^2} e^{-1/t}$$

et par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0.$$

Puisque bien sûr  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = 0$  (rappelons que  $\mu = 0$ ),  $y$  est dérivable en 0. Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont donc les fonctions

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 1.

3.  $(1-t)y' - y = t$  : on résout cette fois l'équation sur chacun des intervalles  $]1, +\infty[$  et  $] -\infty, 1[$ . Les solutions de l'équation homogène associée, sur  $]1, +\infty[$ , sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{1-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On résout ensuite l'équation générale par la méthode de variation de la constante. En posant  $y(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t}$ , on trouve

$$\lambda'(t) = t$$

et donc une solution particulière est donnée par  $y(t) = \frac{t^2}{2(1-t)}$ . On a donc prouvé qu'une fonction  $y$  est solution sur  $]1, +\infty[$  de l'équation si et seulement s'il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $y(t) = \frac{2\lambda + t^2}{2(1-t)}$ . Quand  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $2\lambda$  décrit lui aussi  $\mathbb{R}$  et on peut réécrire cet ensemble de solutions plus simplement comme l'ensemble des fonctions qui s'écrivent  $y(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On résout de même l'équation sur  $] -\infty, 1[$ . Considérons maintenant  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation. Alors il existe deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \\ \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

Pour que  $y$  soit continue en 1, puisque  $1-t \rightarrow 0$  lorsque  $t$  tend vers 1, il est nécessaire que  $\lambda + t^2 \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 1$ , soit  $\lambda = -1$ . De même, on doit avoir  $\mu = -1$ . Ainsi, si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , pour  $t \neq 1$ , elle s'écrit

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}(1+t).$$

Cette fonction se prolonge par continuité en 1, et on vérifie aisément qu'elle est solution de l'équation. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 0.

#### Correction de l'exercice 4 ▲

On note  $x(t)$  la quantité restante en fonction du temps, de sorte que  $x(0) = 20$ . Du fait que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité restante, on tire qu'il existe  $\alpha > 0$  de sorte que  $x$  est solution de l'équation différentielle

$$-x'(t) = \alpha x(t).$$

La résolution de cette équation différentielle donne  $x(t) = Ce^{-at}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ . De  $x(0) = 20$  on tire  $C = 20$ . Puis, de  $x(5) = 10$ , on tire

$$20e^{-5\alpha} = 10 \iff \alpha = \frac{1}{5} \ln 2.$$

La quantité restante vaut donc  $x(t) = 20 \exp(-(\ln 2)t/5)$ . On cherche enfin  $t_0$  de sorte que  $x(t_0) = 1$ . Il vient

$$20 \exp(-(\ln 2)t_0/5) = 1 \iff -(\ln 2)t_0/5 = -\ln 20 \iff t_0 = \frac{5 \ln 20}{\ln 2}.$$

Le temps d'attente restant vaut donc  $t_0 - 5$  minutes. Une application numérique donne environ 16 minutes et 36 secondes.

### Correction de l'exercice 5 ▲

Supposons qu'une telle courbe existe. Soit  $M(a, f(a))$  un point de la courbe. La tangente en  $M$  a pour équation  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ . Pour que cette tangente coupe l'axe des abscisses, il est nécessaire que  $f'(a) \neq 0$ . L'abscisse de  $T$  est alors  $a - f(a)/f'(a)$ . Pour que  $O$  soit le milieu de  $[PT]$ , il est nécessaire et suffisant que  $0 = a - f(a)/f'(a) + a$ .  $f$  est donc solution de l'équation différentielle

$$2af'(a) = f(a).$$

On résout cette équation différentielle, et on trouve que ses solutions sont les fonctions  $f(x) = C\sqrt{x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Pour que  $f$  ne soit pas la fonction nulle (sinon la dérivée s'annule toujours), on doit aussi demander  $C \neq 0$ . Réciproquement, soit  $f(x) = C\sqrt{x}$  avec  $C \neq 0$ . Si  $M(a, C\sqrt{a})$  est un point de la courbe, la tangente en  $M$  a pour équation  $y - C\sqrt{a} = \frac{C}{2\sqrt{a}}(x - a)$ , et elle coupe l'axe des abscisses en le point d'abscisse

$$a - \frac{C\sqrt{a}}{\frac{C}{2\sqrt{a}}} = a - 2a = -a.$$

$O$  est bien le milieu de  $T(-a, 0)$  et de  $P(a, 0)$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $M = (t, f(t))$  un point de  $C_f$ . Le point  $P$  a pour coordonnées  $(t, 0)$ . La tangente à  $C_f$  en  $M$  a pour équation

$$y - f(t) = f'(t)(x - t).$$

L'intersection de la tangente avec l'axe  $(O, \vec{i})$  a pour coordonnées  $(a, 0)$  où  $a$  vérifie

$$-f(t) = f'(t)(a - t) \iff a = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{TP}$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{f(t)}{f'(t)}, 0\right)$ . On cherche les fonctions  $f$  pour lesquelles ce vecteur est constant, c'est-à-dire pour lesquelles il existe  $k \in \mathbb{R}$  de sorte que  $\frac{f(t)}{f'(t)} = k$ .  $k$  ne peut pas être nul, sinon la fonction  $f$  serait identiquement nulle et sa dérivée aussi. Posons  $\lambda = 1/k$ . Alors on cherche les fonctions  $f$  solutions de l'équation différentielle  $f' - \lambda f = 0$ . Ces fonctions sont de la forme  $f(t) = Ce^{\lambda t}$  avec  $C \neq 0$  pour la même raison que ci-dessus. On a donc prouvé que les fonctions solutions sont à rechercher parmi les fonctions  $f(t) = Ce^{\lambda t}$  avec  $C, \lambda \in \mathbb{R}^*$ . Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont solutions (il ne faut pas oublier de traiter la réciproque, ou alors il faut faire très attention de raisonner plus haut par équivalence).

### Correction de l'exercice 7 ▲

Faisant  $s = t = 0$ , on remarque que  $f(0)^2 = f(0)$ , et donc  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$ . Si  $f(0) = 0$ , faisant  $s = 0$ , on trouve que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(t) = f(0)f(t) = 0.$$

On peut donc supposer  $f(0) = 1$ . On repart alors de la relation initiale, on fixe la variable  $s$  à une valeur quelconque de  $\mathbb{R}$ , et on dérive par rapport à  $t$ . On obtient

$$f'(s+t) = f(s)f'(t).$$

On évalue en  $t = 0$ , et on trouve

$$f'(s) = f(s)f'(0).$$

Ainsi,  $f$  est solution d'une équation différentielle  $y' = \alpha y$ . On en déduit que  $f$  est de la forme  $f(x) = Ce^{\alpha x}$ . Pour que  $f(0) = 1$ , il est nécessaire que  $C = 1$ . Réciproquement, on vérifie aisément que la fonction nulle et les fonctions  $x \mapsto e^{\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sont bien solutions de l'équation fonctionnelle.

### Correction de l'exercice 8 ▲

On pose  $g = f + f'$ . Alors  $f$  est solution de l'équation différentielle  $f + f' = g$ . On résout cette équation. L'équation homogène est  $f' + f = 0$  dont la solution générale est donnée par  $\lambda e^{-x}$ . On résout l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant  $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$ , on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction  $f$  vérifiant  $f + f' = g$  s'écrit

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ , il suffit de prouver que  $e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Pour cela, on va utiliser que  $g$  tend vers 0 en  $+\infty$ , et on va couper l'intégrale en 2. Voici l'idée. Soit  $A > 0$  arbitraire pour le moment. Alors, pour  $x \geq A$ , on a

$$\left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_0^A |g(t)e^t| dt + e^{-x} \int_A^x |g(t)|e^t dt.$$

Si  $A$  est fixé, alors on peut rendre le premier terme petit en choisissant  $x$  suffisamment grand. Sur  $[A; x]$ , on peut rendre  $|g(t)|$  petit à condition d'avoir choisi  $A$  assez grand, ce qui nous permettra de rendre le deuxième terme petit.

Reste à effectuer cette démarche dans le bon ordre. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A > 0$  tel que, pour  $t > A$ , on a  $|g(t)| \leq \varepsilon$ . Soit  $M = \int_0^A |g(t)e^t| dt$  et soit  $B \geq A$  tel que, pour  $x \geq B$ , on a  $e^{-x}M \leq \varepsilon$ . Alors, pour tout  $x \geq B$ , il vient

$$\begin{aligned} \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| &\leq e^{-x} \int_0^A |g(t)e^t| dt + e^{-x} \int_A^x |g(t)|e^t dt \\ &\leq e^{-x}M + e^{-x} \int_A^x \varepsilon e^t dt \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien prouvé que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

On remarque d'abord que  $f$  est bien définie pour tout  $x$ . En effet, on a

$$\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} \right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , car en 0 elle est équivalente à  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de  $+\infty$ , elle vérifie

$$\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que  $f$  est de classe  $C^1$ . Pour cela, on remarque que la fonction

$$g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$$

admet en tout point de  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  une dérivée partielle par rapport à  $x$  égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t}e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur  $]0, +\infty[$  (elle est continue en 0, et au voisinage de  $+\infty$ , elle est négligeable devant  $1/t^2$ ). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que  $f$  est dérivable, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx} dt.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de  $f$  grâce à une intégration par parties, en posant  $v(t) = \sqrt{t}$  et  $u(t) = \frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$ . Puisque  $u(0)v(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ , on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt \\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)} f(x) \\ &= \frac{-x+i}{2(x^2+1)} f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. Posant

$$a(x) = \frac{-x+i}{2(x^2+1)},$$

on sait que les solutions sont de la forme

$$f(x) = C \exp(A(x))$$

où  $A$  est une primitive de  $a$ . Écrivons

$$a(x) = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

de sorte qu'une primitive de  $a$  est

$$A(x) = \frac{-1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = C(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante  $C$  en calculant  $f(0) = C$ . On a par ailleurs

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

en effectuant le changement de variables  $t = u^2$ . Utilisant le rappel, on trouve que  $C = \sqrt{\pi}$ .

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = - \int_0^x e^{t^2} dt \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Or, pour  $t \geq 0$ , on a  $e^{t^2} \geq 1$  d'où l'on déduit que pour  $x \geq 0$ ,

$$\int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 = x.$$

On en déduit que  $A(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et donc par composition et produit que  $y(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

Il y a deux clés pour résoudre cet exercice :

toute fonction impaire vaut 0 en 0; l'équation différentielle  $(E)$  admet une unique solution  $y_0$  vérifiant  $y_0(0) = 0$ .

Ceci montre déjà l'unicité : s'il y a une fonction  $y$  impaire solution de  $(E)$ , elle vérifie  $y(0) = 0$  et doit donc être égale à  $y_0$ . Réciproquement, on doit prouver que  $y_0$  est impaire. On va poser  $z(t) = -y_0(-t)$ .  $z$  est solution de  $(E)$ . En effet,

$$z'(t) + a(t)z(t) = y_0'(-t) - a(t)y_0(-t) = y_0'(-t) + a(-t)y_0(-t) = b(-t) = b(t),$$

car  $y_0$  est solution de  $(E)$ ,  $a$  est impaire et  $b$  est paire.  $z$  est donc solution de  $(E)$ , et satisfait de plus  $z(0) = 0$ . Ainsi, par unicité au problème de Cauchy,  $z$  est égale à  $y_0$ , et donc  $y_0$  est impaire. On pouvait aussi prouver que  $y_0$  est impaire, en cherchant à résoudre l'équation différentielle par la méthode usuelle (solution de l'équation homogène à l'aide de l'exponentielle et d'une primitive de  $a$ , puis méthode de variation de la constante).

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme  $y(t) = C \exp(A(t))$  avec  $A(t) = \int_0^t a(u) du$  et  $C \in \mathbb{R}$ . Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|A(t)| \leq \left| \int_0^t |a(u)| du \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |a(u)| du.$$

Ainsi,  $y$  est bornée par  $|C| \exp(\int_{\mathbb{R}} |a(u)| du)$ .

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

1. On commence par résoudre l'équation homogène  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . Son équation caractéristique est  $r^2 - 4r + 3 = 0$ , dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$ . Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = (ax + b)e^{-x}$ . En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, \quad y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc  $a$  et  $b$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a &= 2 \\ 8b - 6a &= 1 \end{cases}$$



On résout ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par  $y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$ . Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme  $y(x) = (ax^2 + bx)e^x$  (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction  $x \mapsto e^x$  est solution de l'équation homogène). On dérive pour trouver

$$y'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \text{ et } y''(x) = (ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b))e^x.$$

Par identification,  $a$  et  $b$  sont solutions du système

$$\begin{cases} -4a &= 2 \\ 2a - 2b &= 1 \end{cases}$$

On obtient comme solution  $a = -1/2$  et  $b = -1$ . La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par la formule

$$y \mapsto \left(\frac{-x^2}{2} - x\right)e^x + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène  $y'' - 2y' + y = 0$ . L'équation caractéristique associée est  $r^2 - 2r + 1 = 0$  qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc  $(Ax + B)e^x$ .

On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$ . On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme  $P(x)e^x$ . Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x \text{ et } y''(x) = (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x,$$

on obtient

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = P''(x)e^x.$$

$y$  est donc solution de l'équation si et seulement si  $P'' = x^2 + 1$ . On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

On cherche maintenant une solution particulière de  $y'' - 2y' + y = e^{3x}$ . Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme  $y(x) = \alpha e^{3x}$ . On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

4. On résout l'équation homogène  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . On introduit l'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3 = 0$ . Ses racines sont 1 et 3. On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de  $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$ . Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme  $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$ . En dérivant et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -6a &= 1 \\ 6a - 4b &= 0 \\ 2b - 2c &= 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est donc obtenue par

$$y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$ . On va en fait chercher une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = xe^{(2+i)x}$  et on en prendra la partie réelle.  $2+i$  n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme  $y_2(x) = (ax+b)e^{(2+i)x}$ . Après dérivation et identification, on trouve le système

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2ia - 2b &= 0. \end{cases}$$

On trouve  $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right)e^{(2+i)x}$ . Prenant la partie réelle, une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x$  est obtenue par

$$x \mapsto \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x}.$$

La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc donnée par

$$x \mapsto -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

5. L'équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 5 = 0$ , dont les racines sont  $1+2i$  et  $1-2i$ . La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$x \mapsto \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x),$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x).$$

On va plutôt résoudre  $y'' - 2y' + 5y = e^{(-1+i)x}$ , puis considérer les parties réelles et imaginaires. Comme  $-1+i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme  $y_0(x) = ae^{(-1+i)x}$ . On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation

$$((-1+i)^2 - 2(-1+i) + 5)a = 1.$$

Il vient  $a = 1/(7-4i) = (7+4i)/65$ . Une solution particulière de  $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x)$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} -4\Re\left(ae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im\left(ae^{(-1+i)x}\right) &= -4\Im\left(iae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im\left(ae^{(-1+i)x}\right) \\ &= \Im\left((-4i+7)ae^{(-1+i)x}\right) \\ &= \Im\left(e^{(-1+i)x}\right) \\ &= e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x).$$

On cherche de la même façon à résoudre  $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$ . Comme  $1+2i$  est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme  $axe^{(1+2i)x}$ , dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire. On trouve finalement que  $xe^x \cos(2x)$  est solution de  $y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$ . Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \mapsto xe^x \cos(2x) + e^{-x} \sin x + \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

---

1. On commence par résoudre l'équation homogène. Son équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 4 = 0$ , dont le discriminant est  $-12$  et les racines sont  $-1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = ae^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + be^{-x} \sin(\sqrt{3}x),$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Cherchons maintenant une solution de l'équation avec second membre. On peut chercher une solution de la forme  $y_p(x) = (cx + d)e^x$ . On a alors

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7cx + 7d + 4c)e^x.$$

Après identification des coefficients, on trouve une solution particulière pour  $c = \frac{1}{7}$  et  $d = \frac{-4}{49}$ . Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$ae^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + be^{-x} \sin(\sqrt{3}x) + \frac{xe^x}{7} - \frac{4e^x}{49},$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Maintenant, si l'on cherche une solution vérifiant  $y(0) = 1$ , on doit avoir

$$a = \frac{53}{49}.$$

La condition  $y(1) = 0$  est alors satisfaite si et seulement si

$$b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

Remarquons qu'on démontre que l'équation différentielle, avec les conditions imposées, admet une unique solution, ce qui n'est pas un résultat de cours (existence et unicité sont obtenues sous une condition de la forme  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_1$ ).

2. On commence par traiter le cas  $m = 0$ , où l'équation différentielle devient  $y'' - 2y' + y = 1$ . Son équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , qui admet 1 pour racine double. On peut continuer la résolution, ou bien remarquer que l'on sait par le cours qu'il existe une unique solution au problème (avec les conditions initiales), et que la fonction constante  $y = 1$  est solution du problème ! Traitons maintenant le cas  $m \neq 0$ . L'équation caractéristique admet pour discriminant  $-4m^2$  dont les racines sont  $\pm 2im$ . Les solutions de l'équation caractéristique sont donc  $1 \pm im$  et les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = a \exp(x) \cos(mx) + b \exp(x) \sin(mx),$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme  $y_p(x) = c \cos(mx) + d \sin(mx)$ . On a

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) + (1 + m^2)y(x) &= (-cm^2 - 2dm + (1 + m^2)c) \cos(mx) + \\ &\quad (-dm^2 + 2cm + (1 + m^2)d) \sin(mx). \end{aligned}$$

Par identification, on cherche  $c$  et  $d$  satisfaisant le système

$$\begin{cases} -cm^2 - 2dm + (1 + m^2)c &= (1 + 4m^2) \\ -dm^2 + 2cm + (1 + m^2)d &= 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne  $c = 1$  et  $d = -2m$ . Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = a \exp(x) \cos(mx) + b \exp(x) \sin(mx) + \cos(mx) - 2m \sin(mx).$$

La condition  $y(0) = 1$  donne  $a = 0$ , tandis que la condition  $y'(0) = 0$  donne  $b = 2m$ . L'unique solution au problème est donc la fonction

$$x \mapsto 2m \exp(x) \sin(mx) + \cos(mx) - 2m \sin(mx).$$

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

Soit  $P$  une fonction polynôme non-nulle solution de l'équation, de coefficient dominant  $a_n x^n$ . Alors  $(x^2 - 3)P'' - 4xP' + 6P$  est une fonction polynôme de degré au plus  $n$ , dont le coefficient devant  $x^n$  est

$$n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = a_n(n^2 - 5n + 6).$$

Ce coefficient doit être nul. Or,  $a_n \neq 0$ . C'est donc que  $n^2 - 5n + 6 = 0$ , ou encore que  $n = 2$  ou  $n = 3$ . On cherche donc les polynômes solution sous la forme  $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ .  $P$  est solution de l'équation si et seulement si les coefficients vérifient le système

$$\begin{cases} -18a_3 + 2a_1 = 0 \\ -6a_2 + 6a_0 = 0 \end{cases}$$

Les polynômes solution sont donc ceux qui s'écrivent

$$\lambda(x^3 + 9x) + \mu(x^2 + 1).$$

Comme les deux fonctions  $x \mapsto x^3 + 9x$  et  $x \mapsto x^2 + 1$  sont linéairement indépendantes, on a donc résolu l'équation sur tout intervalle où  $x^2 - 3$  ne s'annule pas. Raccordons maintenant les solutions. Soit  $f$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Il existe six constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  telles que, si  $f$  est solution de l'équation sur  $\mathbb{R}$ , alors on a

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1(x^3 + 9x) + \mu_1(x^2 + 1) & \text{si } x < -\sqrt{3} \\ \lambda_2(x^3 + 9x) + \mu_2(x^2 + 1) & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ \lambda_3(x^3 + 9x) + \mu_3(x^2 + 1) & \text{si } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Puisque  $f$  est  $C^2$  en  $\sqrt{3}$ , on doit avoir,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = 12\sqrt{3}\lambda_2 + 4\mu_2 = 12\sqrt{3}\lambda_3 + 4\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f'(x) = 18\lambda_2 + 2\sqrt{3}\mu_2 = 18\lambda_3 + 2\sqrt{3}\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f'(x).$$

Cette dernière équation n'apporte pas d'informations supplémentaires, car elle est obtenue en multipliant la première par  $\sqrt{3}/2$ . Si on calcule une dérivée supplémentaire, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f''(x) = 6\sqrt{3}\lambda_2 + 2\mu_2 = 6\sqrt{3}\lambda_3 + 2\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f''(x)$$

qui redonne toujours la même équation. La fonction  $f$  est donc  $C^2$  en  $\sqrt{3}$  si et seulement si

$$\mu_3 = 3\sqrt{3}\lambda_2 + \mu_2 - 3\sqrt{3}\lambda_3.$$

En examinant le problème en  $-\sqrt{3}$ , on tire cette fois comme contrainte

$$\mu_1 = -3\sqrt{3}\lambda_2 + \mu_2 + 3\sqrt{3}\lambda_1.$$

Finalement, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions  $f$  définies comme ci-dessus, où  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2$  et  $\lambda_3$  sont n'importe quel réel, et  $\mu_1, \mu_3$  sont données par les équations précédentes. En particulier, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit  $P$  un polynôme solution de  $(E)$ , et  $a_n t^n$  son terme dominant. Alors le coefficient dominant de  $(t^2 + t)P'' + (t-1)P' - P$  est  $(n(n-1) + n-1)a_n t^n$ . Puisque  $P$  est solution de  $(E)$ , il faut donc que  $n(n-1) + n-1 = 0$ , ce qui entraîne  $n = 1$ . On cherche donc une solution de la forme  $P(t) = at + b$ . On procède par identification

et on trouve facilement que les seules solutions polynômiales sont les polynômes de la forme  $P(t) = \lambda(t-1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. On se ramène à une équation d'ordre 1, en posant  $y(t) = \frac{x(t)}{t-1}$  (c'est possible puisqu'on travaille sur  $]1, +\infty[$ ). On obtient donc  $x' = (t-1)y' + y$  et  $x'' = (t-1)y'' + 2y'$ , et donc  $x$  est solution de (E) si et seulement si  $y$  vérifie

$$(t^2 + t)(t-1)y'' + (2(t^2 + t) + (t-1)^2)y' = 0.$$

On écrit alors  $\frac{y''}{y'}$  sous forme d'une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples, et on trouve :

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{-2}{t-1} - \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t}.$$

On intègre, et on trouve qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que

$$\ln(y'(t)) = \ln\left(\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^2}\right) + C.$$

Passant à l'exponentielle, il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$y'(t) = \frac{\lambda t}{(t^2 - 1)^2}$$

puis intégrant, il existe  $\alpha > 0$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que

$$y(t) = \frac{\alpha}{(1-t^2)} + \mu$$

ce qui donne pour solutions de l'équation initiale

$$x(t) = -\frac{\alpha}{t+1} + \mu(t-1).$$

3. La méthode est exactement identique. Cette fois, on trouve qu'un polynôme solution de l'équation homogène est forcément de degré 2, et  $t \mapsto t^2$  est solution. On applique la méthode d'abaissement de l'ordre en posant  $y(t) = x(t)/t^2$ . La fonction  $y$  est solution de

$$ty'' + y' = 1$$

d'où on trouve  $y$  et finalement  $x$  :

$$x(t) = \lambda t^2 \ln t + \mu t^2 + t^3,$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur  $a, b, c$  et  $d$  pour que ceci définisse une solution de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . La continuité de  $y$  en 0 entraîne que  $a = c$  puisque

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x).$$

De plus, on a

$$y'(x) = -2ax \sin(x^2) + 2bx \cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2b \cos(x^2) - 4bx^2 \sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

De même, on a

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2d \cos(x^2) - 4dx^2 \sin(x^2) \text{ si } x < 0.$$

Remarquons que

$$2b = \lim_{x \rightarrow 0^+} y''(x) \text{ et } 2d = \lim_{x \rightarrow 0^-} y''(x).$$

Pour que  $y''$  soit continue en 0, il est nécessaire que  $b = d$ . Réciproquement la fonction  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$  définit bien une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière solution de (E) de rayon de convergence  $R > 0$ . On introduit ce développement en série entière dans (E). Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :

$$xy'' - y' + 4x^3y = -a_1 + 3a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3})x^n = 0$$

pour tout  $x \in ]-R, R[$ . L'unicité du développement en série entière entraîne que  $a_1 = a_3 = 0$ , tandis que, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n-1)(n+1)}a_{n-3}.$$

En réindexant, on trouve, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+4} = -\frac{4}{(n+2)(n+4)}a_n.$$

3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque  $a_1$  et  $a_3$  sont nuls, on trouve que  $a_{4p+1} = 0$  et  $a_{4p+3} = 0$  pour tout  $p \geq 0$ .

4. La relation de récurrence nous dit que

$$a_{4p} = -\frac{4}{(4p)(4p-2)}a_{4(p-1)} = \frac{-1}{2p(2p-1)}.$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

De même, on obtient

$$a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que  $\frac{R^p}{(2p)!}$  tend vers 0 lorsque  $p$  tend vers l'infini, pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{4p} + a_2 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+2} \\ &= a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2). \end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ , sa somme est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par  $\cos(x^2)$  et  $\sin(x^2)$ . Considérons maintenant une solution  $y$  de (E) sur  $\mathbb{R}$ . Elle est solution sur  $]0, +\infty[$ , et donc il existe deux constantes  $a_0$  et  $a_2$  telles que

$$y(x) = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) \text{ pour } x > 0.$$

Elle est solution sur  $] -\infty, 0[$  et donc il existe deux constantes  $b_0$  et  $b_2$  telles que

$$y(x) = b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) \text{ pour } x < 0.$$

D'après la question préliminaire,  $y$  va se prolonger en une fonction de classe  $C^2$  si et seulement si  $a_0 = b_0$  et  $a_2 = b_2$ . Ainsi, l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . On introduit ceci dans l'équation

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 0.$$

On réindexe la troisième somme pour retrouver une somme faisant apparaître un terme en  $x^{n-1}$ . On trouve

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-1} = 0.$$

On en déduit  $a_1 = 0$ , puis, pour  $n \geq 2$ ,

$$n(n+1)a_n = a_{n-2}.$$

On en déduit que, pour tout entier  $p$ ,  $a_{2p+1} = 0$  alors

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+1)2p} = \cdots = \frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Comme la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ , on trouve que la fonction

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}$$

est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation. On résout alors l'équation sur  $]0, +\infty[$  ou sur  $] -\infty, 0[$  (où on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2) par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose  $y(x) = f(x)z(x)$ . Sachant que  $f$  est solution de l'équation, on trouve que  $y$  est aussi solution si et seulement si  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$2xf'z' + xfz'' + 2fz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en  $z'$ , que l'on sait résoudre. Remplaçant  $f$  par sa valeur, on trouve

$$2 \cosh x z' + \sinh x z'' = 0 \implies \frac{z''}{z'} = -2 \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Il vient

$$z' = \frac{\lambda}{\sinh^2 x}$$

puis

$$z = \frac{\lambda \cosh x}{\sinh x} + \mu.$$

Finalement, toute solution sur  $]0, +\infty[$  s'écrit sous la forme

$$y(x) = \mu \frac{\sinh x}{x} + \lambda \frac{\cosh x}{x}.$$

Si on cherche maintenant les solutions sur  $\mathbb{R}$  tout entier, il faut procéder par recollement. Si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \mu_1 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_1 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu_2 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_2 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En étudiant la limite de  $\cosh x/x$  en zéro, et sachant que  $y$  doit être continu en 0, on voit que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . D'autre part, puisque  $\sinh x/x \rightarrow 1$  en 0, la continuité de  $y$  en 0 impose alors que  $\mu_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \mu_2$ . Ainsi, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions  $x \mapsto \mu \frac{\sinh x}{x}$ .

2. On recopie la même méthode, en posant  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Si on introduit dans l'équation, on trouve

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n \geq 1} na_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$

On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 1} n(n+1)a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$

Par identification, on trouve  $a_0 = 0$ ,  $a_2 = 2a_1$ , puis, pour  $n \geq 2$  :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Ainsi, par récurrence, on trouve  $a_n = n a_1$ . Puisque la série entière  $\sum_{n \geq 1} n x^n$  a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur  $] -1, 1[$  (en réalité, sur  $] -\infty, 1[$ ). On va ensuite résoudre l'équation sur  $]0, 1[$ , par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose  $y(x) = f(x)z(x)$ . Sachant que  $f$  est solution de l'équation, on trouve que  $y$  est aussi solution si et seulement si  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en  $z'$ , que l'on sait résoudre. Remplaçant  $f$  par sa valeur, simplifiant par  $x$ , et après regroupement, on trouve

$$z'(x-2) = x(1-x)z''.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Ceci s'intègre en

$$z' = \lambda \frac{1-x}{x^2} = \lambda \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right).$$

On intègre encore une fois pour trouver  $z$ . Quitte à changer  $\lambda$  en  $-\lambda$ , il vient :

$$z = \lambda \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) + \mu.$$

Les solutions de l'équation sur  $]0, 1[$  sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{\mu x + \lambda(1+x \ln x)}{(1-x)^2}.$$

Si on cherche les solutions sur  $\mathbb{R}$ , il faut au moins que la fonction ait une limite en 1. Faisons le développement limité du numérateur, en posant  $x = 1 - h$ . Il vient

$$\begin{aligned} N(x) &= \mu(1-h) + \lambda(1 + (1-h)\ln(1-h)) \\ &= \mu - \mu h + \lambda(1 + (1-h)(-h - h^2/2 + o(h^2))) \\ &= \mu - \mu h + \lambda(1 - h + h^2/2 + o(h^2)) \\ &= (\mu + \lambda) - (\mu + \lambda)h + \lambda h^2/2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est  $h^2$ , la fonction admet une limite en 1 si et seulement si  $\lambda = -\mu$ . D'autre part, il faut que la fonction soit dérivable en 0. Mais, du fait de la présence du terme  $x \ln x$ , dont le taux d'accroissement en 0 tend vers  $-\infty$ , la fonction ne peut être dérivable que si  $\lambda = 0$ . Ainsi, la seule solution sur  $\mathbb{R}$  est la fonction nulle !



1. Soit  $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  une solution de l'équation développable en série entière. Alors, on a

$$2xy'' - y' + x^2y = -a_1 + 2a_2x + \sum_{i=2}^{+\infty} ((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2})x^i = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve  $a_1 = a_2 = 0$  et la formule de récurrence

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}.$$

On a donc, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$  et

$$a_{3k} = -\frac{1}{3k(6k-3)}a_{3k-3} = -\frac{1}{9k(2k-1)}a_{3k-3}.$$

Par récurrence,

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k}{9^k k! (2k-1) \times (2k-3) \cdots \times 3 \times 1} a_0 = \frac{(-1)^k 2^k k!}{9^k k! (2k)!} a_0 = \frac{(-1)^k 2^k}{9^k (2k)!} a_0.$$

Réciproquement, pour tout  $a_0$  dans  $\mathbb{R}$ , la série entière

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{9^k (2k)!} x^{3k}$$

a pour rayon de convergence  $+\infty$  et est solution de l'équation différentielle. Si on cherche maintenant à identifier à une fonction classique, le terme  $\frac{x^{3k}}{(2k)!}$  nous met sur la voie. Cela ressemble au terme général de  $\cos(x)$ , ou plutôt de  $\cos(x^{3/2})$ . Comme ceci n'est défini que pour  $x > 0$ , il faut aussi considérer  $\cosh((-x)^{3/2})$  pour  $x < 0$ . Avec une homothétie pour obtenir  $\frac{2^k}{9^k}$ , on trouve finalement que

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2. La forme de la solution trouvée précédemment nous conduit au changement de variables  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$  pour  $x > 0$ , c'est-à-dire à chercher l'équation différentielle vérifiée par  $z(t) = y(x)$ . Or,

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'(t)$$

et

$$y''(x) = \frac{1}{2}xz''(t) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}z'(t).$$

On trouve donc

$$2xy'' - y' + x^2y = x^2z'' + \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' - \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' + x^2z = 0.$$

$z$  vérifie donc l'équation différentielle  $z'' + z = 0$ , et donc  $z = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$  pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, la solution générale de (E) sur  $]0, +\infty[$  est donnée par :

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour résoudre l'équation sur  $] -\infty, 0[$ , on pose cette fois  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}$ . La fonction  $z(t) = y(x)$  vérifie l'équation différentielle  $z'' - z = 0$ , et donc la solution générale sur  $] -\infty, 0[$  est donnée par

$$y(x) = \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

3. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on sait qu'il existe des constantes  $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{pour } x > 0 \\ \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Comme  $y$  est continue en 0 et que  $\lim_{0+} y = \lambda$  alors que  $\lim_{0-} y = \lambda'$ , on en déduit que  $\lambda = \lambda'$ . D'autre part, pour  $x > 0$ , on note  $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ . On a

$$y_2''(x) = \left( \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) \right)'' = -\frac{x}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour  $x \rightarrow 0$ , ceci tend vers  $+\infty$ . Or, puisqu'une solution de  $(E)$  est de classe  $C^2$ , on sait que  $y''(x)$  admet une limite (finie) quand  $x$  tend vers 0, et que  $y_1$  se prolonge en fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\lim_0 y_1'$  existe (et est finie). Puisque  $\lim_{0+} y'' = \lambda \lim_{0+} y_1'' + \mu \lim_{0+} y_2''$ , ceci ne peut être fini que si  $\mu = 0$ . De même, on trouve que  $\mu' = 0$ . Les seules solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E)$  sont donc celles données par la première question.

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. Fixons  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors, pour  $f \in E$ , on a

$$\phi(f) = \lambda f \iff f' + (t - \lambda)f = 0.$$

Par la théorie des équations différentielles linéaires, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1. On peut de plus résoudre facilement cette équation. En effet, elle devient

$$\frac{f'}{f} = -t + \lambda \implies \ln|f(t)| = -\frac{t^2}{2} + \lambda t + C$$

et donc l'ensemble des solutions est donné par les multiples de la fonction

$$f_\lambda(t) = e^{-t^2/2} e^{\lambda t}.$$

Tous les nombres complexes sont donc valeurs propres de  $\phi$ , l'espace propre associé étant la droite vectorielle de direction  $f_\lambda$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors il existe un nombre complexe  $\mu \neq 0$  tel que  $\lambda = \mu^2$ . Mais alors, le polynôme  $X^2 - \lambda$  se factorise en  $(X - \mu)(X + \mu)$ . On s'intéresse ici à  $\ker(\phi^2 - \lambda Id)$ . Par le théorème de décomposition des noyaux (les polynômes  $X - \mu$  et  $X + \mu$  sont premiers entre eux car  $\mu \neq -\mu$ ), et donc

$$\ker(\phi^2 - \lambda Id) = \ker(\phi + \mu Id) \oplus \ker(\phi - \mu Id).$$

On en déduit que si  $\lambda = \mu^2 \neq 0$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\phi^2$ , d'espace propre de dimension 2 engendré par les deux fonctions  $f_\mu$  et  $f_{-\mu}$ . Enfin, si  $\lambda = 0$ , alors  $\phi^2(f) = 0$  équivaut à

$$(f' + tf)' + t(f' + tf) = 0 \iff f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f = 0.$$

Il faut alors résoudre cette équation d'ordre 2. Une façon de procéder est de remarquer que l'on connaît déjà une solution, la fonction  $y(t) = e^{-t^2/2}$ , puisque un élément de  $\ker(\phi)$  est nécessairement un élément de  $\ker(\phi^2)$ . On peut alors en déduire une deuxième solution indépendante par la méthode d'abaissement de l'ordre. Sinon, on peut aussi remarquer que

$$\phi^2(f) = 0 \implies \phi(f) \in \ker(\phi) \implies f' + tf = ae^{-t^2/2}.$$

On résout alors cette équation du premier ordre, le problème étant de trouver une solution particulière. Mais il est facile de remarquer que la fonction  $t \mapsto te^{-t^2/2}$  convient. Finalement, on a aussi prouvé que 0 est une valeur propre de  $\phi^2$ , le sous-espace propre associé étant engendré par les fonctions  $t \mapsto e^{-t^2/2}$  et  $t \mapsto te^{-t^2/2}$ .

3. On a déjà remarqué que

$$\phi^2(f) = f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f.$$

L'équation correspond donc à  $\phi^2(y) = -2y$ , c'est-à-dire qu'on cherche le sous-espace propre associé à  $-2$  de l'endomorphisme  $\phi^2$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t^2/2}(ae^{it\sqrt{2}} + be^{-it\sqrt{2}}), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Si on cherche les solutions réelles, on trouve

$$t \mapsto e^{-t^2/2}(a \cos(t\sqrt{2}) + b \sin(t\sqrt{2})), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

---

### Correction de l'exercice 21 ▲

Procédons par analyse/synthèse. On suppose dans un premier temps l'existence de telles fonctions  $p$  et  $q$ . Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} py_1' + qy_1 = -y_1'' \\ py_2' + qy_2 = -y_2'' \end{cases}.$$

Dans ce système, les inconnues sont les fonctions  $p$  et  $q$ . À  $t$  fixé, le déterminant de ce système, qui vaut  $w(t)$ , n'est pas nul, et on peut définir uniquement  $p$  et  $q$ . On a même

$$p = \frac{y_1''y_2 - y_1y_2''}{w} \text{ et } q = \frac{y_1'y_2'' - y_1''y_2'}{w}.$$

Ainsi,  $p$  et  $q$  sont définies uniquement. Réciproquement, les fonctions  $p$  et  $q$  définies ci-dessus sont bien continues sur  $I$ , comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et il est facile de vérifier que  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de l'équation  $y'' + py' + qy = 0$ .

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

1. Oui, il s'agit bien d'une équation linéaire, mais elle n'est pas à coefficients constants.
2. On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

En posant, comme indiqué dans l'énoncé,  $x = e^t$ ,  $(E)$  se réécrit :

$$e^{2t} y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite  $y'(e^t)$  et  $y''(e^t)$  en fonction de  $z'(t)$  et de  $z''(t)$ . On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t} z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t} z''(t) - e^{-t} y'(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)).$$

En introduisant cela dans  $(E)$ , on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ , dont la seule solution est  $\lambda = 2$ . Ainsi, il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $z(t) = ae^{2t} + be^{2t}$ . On revient à  $y$  par  $y(x) = z(\ln x)$  et  $t = \ln x$ . On trouve que si  $y$  est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

3. On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

4. En posant, comme indiqué dans l'énoncé,  $x = e^t$ ,  $(E)$  se réécrit :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

On exprime ensuite  $y'(e^t)$  et  $y''(e^t)$  en fonction de  $z'(t)$  et de  $z''(t)$ . On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t}z''(t) - e^{-t}y'(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t)).$$

En introduisant cela dans  $(E)$ , on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

5. Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ , dont la seule solution est  $\lambda = 2$ . Ainsi, il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$ .

6. On revient à  $y$  par  $y(x) = z(\ln x)$  et  $t = \ln x$ . On trouve que si  $y$  est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

7. On a montré que si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors il existe deux réels  $a, b$  tels que, pour tout  $x > 0$ , on a  $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$ . Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction  $x \mapsto ax^2 + bx^2 \ln x$  est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

1. Puisque  $y$  admet une infinité de zéros dans  $[\alpha, \beta]$ , on peut construire une suite  $(y_n)$  de  $[\alpha, \beta]$  constituée de zéros distincts de  $y$ . Or,  $(y_n)$  est une suite du segment  $[\alpha, \beta]$ . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite  $(y_{\phi(n)})$  convergente vers  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ . La suite  $(z_n) = (y_{\phi(n)})$  convient.

2. Par continuité de  $y$  en  $\gamma$ , on a nécessairement  $y(\gamma) = 0$ .

3. Ou bien tous les  $z_n$  sont distincts de  $\gamma$ , et le quotient est toujours bien défini. Ou bien il existe un entier  $n_0$  tel que  $z_{n_0} = \gamma$ . Mais puisque les  $z_n$  sont deux à deux distincts, pour  $n > n_0$ ,  $z_n \neq \gamma$  et le quotient est bien défini. Il est toujours nul, et si  $n$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que  $y'(\gamma) = 0$ .

4.  $y$  est une solution de l'équation différentielle vérifiant  $y(\gamma) = y'(\gamma) = 0$ . Or, d'après le théorème de Cauchy, il existe une et une seule solution à cette équation différentielle vérifiant cette condition initiale. Et la fonction nulle est justement une solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale. On en déduit que  $y$  est identiquement nulle.

---

### Correction de l'exercice 24 ▲

1.  $z$  est deux fois dérivable et vérifie

$$z'(x) = (1 + e^x)y'(x) + e^xy(x), \quad z''(x) = (1 + e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + e^xy(x).$$

Il est facile de vérifier que  $y$  vérifie l'équation différentielle de départ si et seulement si  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = xe^x.$$

Or, on a ici une équation différentielle à coefficients constants facile à résoudre, dont les solutions sont les fonctions  $z(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2}e^x$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $y$  qui sont solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions

$$y(x) = (1 + e^x)^{-1} \left( A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2}e^x \right).$$

2.  $z = xy$  est deux fois dérivable, et on a  $z' = xy' + y$  et  $z'' = xy'' + 2y'$ . Ainsi,  $z$  vérifie l'équation

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

L'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1 = 0$  dont  $-1$  est racine double. Ainsi,  $z$  vérifie  $\lambda x e^{-x} + \mu e^{-x}$ . On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur  $]0, +\infty[$  ou sur  $] -\infty, 0[$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu \frac{e^{-x}}{x}.$$

Soit maintenant  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Alors, il existe des constantes  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x} + \mu_1 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_2 e^{-x} + \mu_2 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour que  $y$  admette une limite en 0, il est nécessaire que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , puis que  $\lambda_1 = \lambda_2$  pour que les limites à droite et à gauche coïncident. Ainsi, puisque  $x \mapsto e^{-x}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et solution de l'équation, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x}.$$

### Correction de l'exercice 25 ▲

1. Posons  $t = e^x$ , puis  $z(t) = y(x)$  soit  $z(e^x) = y(x)$ . On en déduit

$$y'(x) = e^x z'(e^x) \text{ puis } y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x).$$

Si  $y$  vérifie l'équation différentielle, alors  $z$  vérifie l'équation

$$e^{2x} z''(t) - e^{2x} z(t) = e^{3x}$$

soit

$$z'' - z = t.$$

On résout maintenant très facilement cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont

$$z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $t \mapsto -t$  est solution particulière de l'équation, et donc la solution générale de l'équation vérifiée par  $z$  est de la forme

$$z(t) = -t + \lambda e^t + \mu e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Revenant à  $y$ , on trouve

$$y(x) = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation de départ est définie sur chaque intervalle  $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ . Puisque les fonctions intervenant dans l'équation différentielle sont  $\pi$ -périodiques, on peut se contenter de résoudre l'équation sur  $] -\pi/2, \pi/2[$  et il est légitime de poser  $t = \sin x$  puisque  $\sin$  définit une bijection de  $] -\pi/2, \pi/2[$  sur  $] -1, 1[$ . Soit  $z$  défini par  $z(t) = y(x)$ , ie  $y(x) = z(\sin x)$ . On dérive :

$$y'(x) = z'(\sin x) \cos x \implies y'(x) \tan x = z'(t) \sin x = t z'(t).$$

On dérive une seconde fois :

$$y''(x) = z''(\sin x) \cos^2 x - z'(\sin x) \sin(x) = z''(t)(1 - t^2) - t z'(t).$$

L'équation devient

$$(1 - t^2) z'' - (1 - t^2) z = 0 \implies z'' - z = 0,$$

la simplification étant légitime puisque  $(1 - t^2) > 0$  sur  $] -1, 1[$ . On obtient  $z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , et donc en revenant à  $y$ , on trouve

$$y(x) = \lambda e^{\sin x} + \mu e^{-\sin x}.$$

3. On résout l'équation sur  $]0, +\infty[$ , et on pose  $z(t) = y(e^t)$ . Il vient  $z'(t) = e^t y'(e^t)$  et  $z''(t) = e^{2t} y''(t) + e^t y'(e^t)$ . Or, si  $y$  est solution de l'équation différentielle, on a  $e^{2t} y''(t) + y(e^t) = 0 \implies z'' - z' + z = 0$ . On résout cette équation : l'équation caractéristique est  $r^2 - r + 1 = 0$ , dont les racines sont  $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . La solution générale de l'équation vérifiée par  $z$  est donc donnée par

$$z(t) = \lambda e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En revenant à  $y$ , on trouve que les solutions sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right).$$

4. On pose  $x = \sin(t)$  avec  $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , et  $z(t) = y(x)$ , ie  $z(t) = y(\sin t)$ . Il vient

$$z'(t) = \cos(t) y'(\sin t) \text{ et } z''(t) = \cos^2(t) y''(\sin t) - \sin(t) y'(\sin t).$$

L'équation initiale se traduit en

$$\cos^2(t) y''(\sin t) - \sin(t) y'(\sin t) + y(\sin t) = 0 \implies z'' + z = 0.$$

La solution générale est donnée par

$$z(t) = \lambda \sin(t) + \mu \cos(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En revenant à  $y$  et  $x$ , on trouve que

$$y(x) = \lambda \sin(\arcsin x) + \mu \cos(\arcsin x) = \lambda x + \mu \sqrt{1-x^2}.$$

Pour résoudre l'équation sur  $]1, +\infty[$ , on aurait pu considérer le changement de variables  $y = \cosh(t)$ .

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. L'équation caractéristique associée à cette équation est  $r^2 - 3r + 2 = 0$  dont les solutions sont 1 et 2. Une base de l'ensemble des solutions homogènes est donnée par les fonctions  $y_1 : t \mapsto e^t$  et  $y_2 : t \mapsto e^{2t}$ . On cherche une solution particulière  $t \mapsto \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$  où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant le système

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) &= \frac{1}{1+e^{-2t}}. \end{cases}$$

On résout le système et on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) &= -\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \\ \lambda_2'(t) &= \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}. \end{cases}$$

En reconnaissant les formes  $u'/u$  et  $u'/(1+u^2)$ , on trouve qu'on peut choisir

$$\begin{cases} \lambda_1(t) &= \arctan(e^{-t}) \\ \lambda_2(t) &= -\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t}). \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$t \mapsto (\lambda + \arctan(e^{-t}))e^t + \left(\mu - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t})\right)e^{2t}.$$

2. On résout d'abord l'équation homogène sans second membre  $y'' + 4y = 0$ . Son équation caractéristique est  $r^2 + 4 = 0$ , dont les racines sont  $2i$  et  $-2i$  et donc les fonctions  $y_1 : t \mapsto \sin(2t)$  et  $y_2 : t \mapsto \cos(2t)$  forment

une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution qui s'écrit :  $y(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$ . Les fonctions dérivées  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda'_1(t)y_1(t) + \lambda'_2(t)y_2(t) &= 0 \\ \lambda'_1(t)y'_1(t) + \lambda'_2(t)y'_2(t) &= \tan(t) \end{cases}$$

On remplace  $y_1$  et  $y_2$  par leurs valeurs respectives, et on trouve le système

$$\begin{cases} \lambda'_1(t)\sin(2t) + \lambda'_2(t)\cos(2t) &= 0 \\ \lambda'_1(t)\cos(2t) - \lambda'_2(t)\sin(2t) &= \frac{1}{2}\tan(t). \end{cases}$$

Il vient

$$\lambda'_1(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1 - \sin(t)}{2\cos(t)}$$

en utilisant  $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ . La dernière partie du membre de droite est de la forme  $u'/u$ . On peut intégrer et on trouve que l'on peut choisir

$$\lambda_1(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos t).$$

De même, on trouve

$$\lambda'_2(t) = -\sin^2(t) = -\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

ce qui nous amène à choisir

$$\lambda_2(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t).$$

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Si  $f$  ne gardait pas un signe constant, puisqu'elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'annulerait.

2. Puisque  $f'' = -pf$ ,  $f'' \leq 0$  et donc  $f$  est concave. Sa courbe représentative est donc en-dessous de ses tangentes.

3. Si  $f'(a) \neq 0$ , alors  $f$  deviendrait négative puisque, d'après la question précédente, elle est majorée sur  $\mathbb{R}$  par une fonction affine de pente non nulle.

4.  $a$  étant arbitraire,  $f$  est constante. Or, puisque  $p$  n'est pas identiquement nulle, on sait qu'il existe un réel  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $p(x_0) \neq 0$ . Dans ce cas, on a forcément  $f(x_0) = 0$ , alors qu'on a supposé que  $f$  ne s'annule pas.

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. On démontre par récurrence sur  $k \geq 2$  que  $y$  est  $C^k$ . Pour  $k = 2$ ,  $y'' = -\varphi y$  est continue, donc  $y$  est  $C^2$ . Supposons la propriété démontrée au rang  $k$  et prouvons-la au rang  $k + 1$ . Si  $y$  est  $C^k$ , alors  $y'' = -\varphi y$  est aussi  $C^k$ . En particulier,  $y$  est  $C^{k+1}$ . Posons  $f(x) = y(-x)$ , de sorte que  $f'(x) = -y'(-x)$  et  $f''(x) = y''(-x)$ . On a donc

$$f''(x) + \varphi(x)f(x) = y''(-x) + \varphi(x)y(-x) = y''(-x) + \varphi(-x)y(-x) = 0$$

et donc  $f$  est aussi solution de l'équation différentielle. Posons  $g_0(x) = f_0(-x)$ , solution de l'équation différentielle sur  $I$ . Elle vérifie de plus les mêmes conditions initiales que  $f_0$ , à savoir  $g_0(0) = f_0(0) = 1$  et  $g'_0(0) = -f'_0(0) = 0$ . Ainsi,  $f_0 = g_0$  et  $f_0$  est paire. Pour prouver que  $f_1$  est impaire, on pose  $g_1(x) = -f_1(-x)$ , et on vérifie que  $g_1$  est solution de l'équation avec les mêmes conditions initiales que  $f_1$ . Remarquons que  $(f_0, f_1)$  est une famille libre. En effet, si  $f_1 = Cf_0$ , alors  $f'_1 = Cf'_0$  et ceci est incompatible avec  $f'_1(0) = 1$  et  $f'_0(0) = 0$ . Ainsi, la famille  $(f_0, f_1)$  est une base de l'ensemble des solutions de  $(E)$ . Donc la solution générale de  $(E)$  s'écrit  $\lambda f_0 + \mu f_1$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Notons  $y$  une telle solution. Pour qu'elle soit paire, il faut que  $y(-x) = y(x)$ . Mais,

$$y(-x) = \lambda f_0(x) - \mu f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = y(x).$$

La famille  $(f_0, f_1)$  étant libre, on en déduit que  $\mu = -\mu$ , soit  $\mu = 0$ , et seuls les multiples de  $f_0$  sont solutions paires de l'équation. De même, seuls les multiples de  $f_1$  sont solutions impaires de l'équation.

2. On démontre par récurrence sur  $k \geq 2$  que  $y$  est  $C^k$ . Pour  $k = 2$ ,  $y'' = -\varphi y$  est continue, donc  $y$  est  $C^2$ . Supposons la propriété démontrée au rang  $k$  et prouvons-la au rang  $k + 1$ . Si  $y$  est  $C^k$ , alors  $y'' = -\varphi y$  est aussi  $C^k$ . En particulier,  $y$  est  $C^{k+1}$ .

3. Posons  $f(x) = y(-x)$ , de sorte que  $f'(x) = -y'(-x)$  et  $f''(x) = y''(-x)$ . On a donc

$$f''(x) + \varphi(x)f(x) = y''(-x) + \varphi(x)y(-x) = y''(-x) + \varphi(-x)y(-x) = 0$$

et donc  $f$  est aussi solution de l'équation différentielle.

4. Posons  $g_0(x) = f_0(-x)$ , solution de l'équation différentielle sur  $I$ . Elle vérifie de plus les mêmes conditions initiales que  $f_0$ , à savoir  $g_0(0) = f_0(0) = 1$  et  $g'_0(0) = -f'_0(0) = 0$ . Ainsi,  $f_0 = g_0$  et  $f_0$  est paire. Pour prouver que  $f_1$  est impaire, on pose  $g_1(x) = -f_1(-x)$ , et on vérifie que  $g_1$  est solution de l'équation avec les mêmes conditions initiales que  $f_1$ .

5. Remarquons que  $(f_0, f_1)$  est une famille libre. En effet, si  $f_1 = Cf_0$ , alors  $f'_1 = Cf'_0$  et ceci est incompatible avec  $f'_1(0) = 1$  et  $f'_0(0) = 0$ . Ainsi, la famille  $(f_0, f_1)$  est une base de l'ensemble des solutions de  $(E)$ . Donc la solution générale de  $(E)$  s'écrit  $\lambda f_0 + \mu f_1$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Notons  $y$  une telle solution. Pour qu'elle soit paire, il faut que  $y(-x) = y(x)$ . Mais,

$$y(-x) = \lambda f_0(x) - \mu f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = y(x).$$

La famille  $(f_0, f_1)$  étant libre, on en déduit que  $\mu = -\mu$ , soit  $\mu = 0$ , et seuls les multiples de  $f_0$  sont solutions paires de l'équation. De même, seuls les multiples de  $f_1$  sont solutions impaires de l'équation.

6. Il s'agit d'une vérification immédiate. Puisque  $x \mapsto f_0(x + 2\pi)$  est solution de l'équation, on sait qu'il existe des constantes  $w_{00}$  et  $w_{10}$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_0(x + 2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x).$$

Faisant  $x = 0$ , on trouve  $w_{00} = f_0(2\pi)$ . Dérivant l'équation, et faisant  $x = 0$ , on trouve  $w_{10} = f'_0(2\pi)$ . On utilise le même raisonnement pour  $f_1$ . Soit  $y$  une solution de  $(E)$ ,  $y = \lambda f_0 + \mu f_1$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y(x + 2\pi) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x).$$

Puisque  $(f_0, f_1)$  est une base de solutions de  $(E)$ ,  $y$  est une solution  $2\pi$ -périodique si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda w_{00} + \mu w_{01} = \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} = \mu \end{cases}$$

Autrement dit,  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $W$  pour la valeur propre 1. Réciproquement, si  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $W$  pour la valeur propre 1, alors  $y = \lambda f_0 + \mu f_1$  est solution  $2\pi$ -périodique de  $(E)$ .

7. Il s'agit d'une vérification immédiate.

8. Puisque  $x \mapsto f_0(x + 2\pi)$  est solution de l'équation, on sait qu'il existe des constantes  $w_{00}$  et  $w_{10}$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_0(x + 2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x).$$

Faisant  $x = 0$ , on trouve  $w_{00} = f_0(2\pi)$ . Dérivant l'équation, et faisant  $x = 0$ , on trouve  $w_{10} = f'_0(2\pi)$ . On utilise le même raisonnement pour  $f_1$ .

9. Soit  $y$  une solution de  $(E)$ ,  $y = \lambda f_0 + \mu f_1$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y(x + 2\pi) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x).$$

Puisque  $(f_0, f_1)$  est une base de solutions de  $(E)$ ,  $y$  est une solution  $2\pi$ -périodique si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda w_{00} + \mu w_{01} = \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} = \mu \end{cases}$$

Autrement dit,  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $W$  pour la valeur propre 1. Réciproquement, si  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $W$  pour la valeur propre 1, alors  $y = \lambda f_0 + \mu f_1$  est solution  $2\pi$ -périodique de  $(E)$ .



---

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. La fonction  $x \mapsto x \sin(1/x)$  si  $x \neq 0$  et  $0 \mapsto 0$  est un tel exemple (vérifier qu'elle est continue et que la suite  $(1/2n\pi)_n$  est une suite de zéros distincts qui converge vers zéro) !

2. Soit  $(a_n)$  une suite de zéros de  $f$  tous distincts, et donc distincts de  $a$ , qui converge vers  $a$ . Alors le taux d'accroissement

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = 0$$

est nul, et le membre de gauche tend vers  $f'(a)$ .

3. Puisque  $f$  ne s'annule pas dans l'intervalle  $[a, b]$ , elle y garde un signe constant. On peut supposer par exemple que  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ . Mais alors, il est facile de voir que nécessairement  $f'(a) \geq 0$ . En effet, pour  $x \in ]a, b]$ , on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et il suffit de faire tendre  $x$  vers  $a$  pour en déduire le résultat annoncé. De même, on a  $f'(b) \leq 0$ , ce qui est le résultat voulu.

4. Supposons que  $t_0$  soit un zéro non-isolé de  $f$ . Alors on a  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ . Or, d'après la théorie sur les équations différentielles linéaires, on sait qu'il existe une seule solution de  $(E)$  vérifiant  $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ . La fonction nulle est solution de  $(E)$  et vérifie ces deux conditions. On en déduit que  $f$  est identiquement nulle, une contradiction.

5. C'est le même type de raisonnement. En effet, on écrit qu'il existe une seule solution  $y$  de  $(E)$  vérifiant  $y(t_0) = Cf(t_0)$  et  $y'(t_0) = Cf'(t_0)$ . Or,  $g$  et  $Cf$  sont deux solutions de  $(E)$  vérifiant cette contrainte. C'est donc que  $g = Cf$ .

6. Si  $W$  s'annule en un point  $t_0$ , par définition du déterminant, c'est que les vecteurs  $(f(t_0), f'(t_0))$  et  $(g(t_0), g'(t_0))$  sont colinéaires. Par exemple, on peut supposer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $g(t_0) = Cf(t_0)$  et  $g'(t_0) = f'(t_0)$ . Mais alors,  $g = Cf$  ce qui contredit que  $(f, g)$  forme une base de l'ensemble des solutions.

7. Par définition, on sait que, pour tout réel  $t$ ,

$$W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

On dérive alors cette équation. Utilisant le fait que  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant  $f''$  et  $g''$  par respectivement  $-p(t)f'(t) - q(t)f$  et  $-p(t)g'(t) - q(t)g(t)$ , on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On intègre alors cette équation différentielle, et on trouve que

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right).$$

8. On a  $W(a) = -f'(a)g(a)$  et  $W(b) = -f'(b)g(b)$ . Puisque  $W$  est une fonction continue qui ne s'annule pas, elle garde un signe constant. De plus, on sait que  $f'(a)$  et  $f'(b)$  ont des signes opposés. Il en est donc de même de  $g(a)$  et de  $g(b)$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires,  $g$ , qui est bien une fonction continue, s'annule sur  $[a, b]$ .

---

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. Soit  $y$  une solution bornée. On a, pour tout  $t > 0$ ,

$$y'(t) - y'(0) = \int_0^t y''(u)du = -\int_0^t f(u)y(u)du.$$

Or, la fonction  $fy$ , produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée, est elle-même intégrable. Ainsi,  $t \mapsto \int_0^t f(u)y(u)du$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  et il en est de même de  $y'(t)$ . Mais la limite de  $y'$  en

$+\infty$  ne peut être que nulle. En effet, si  $y'(t) \rightarrow \ell$  avec par exemple  $\ell > 0$ , alors il existe  $A > 0$  tel que  $y'(t) \geq \ell/2$  pour  $t \geq A$ . Mais alors

$$y(t) - y(A) \geq \ell(t - A)/2$$

et donc  $y$  ne peut pas être bornée.

2. Il suffit de dériver  $W$  :

$$W'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = -f(t)y_1(t)y_2(t) + f(t)y_1(t)y_2(t) = 0.$$

La dérivée de  $W'$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $W$  est constant sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Supposons que toutes les solutions soient bornées, et considérons deux solutions indépendantes  $y_1$  et  $y_2$ . Alors leur déterminant wronskien est constant, et non nul puisque les deux solutions sont indépendantes. Mais, puisque  $y_1'$  et  $y_2'$  tendent vers 0 en  $+\infty$ , on en déduit que  $W(t)$  tend aussi vers 0 en  $+\infty$ . C'est bien sûr une contradiction, et donc il existe des solutions non-bornées.

### Correction de l'exercice 31 ▲

1. Soit  $a$  un zéro de  $f$ . Alors, par unicité au problème de Cauchy, et puisque  $f$  n'est pas la solution nulle, on sait que  $f'(a) \neq 0$ . Donc, par la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) \sim_a f'(a)(x - a).$$

Ainsi, au voisinage de  $a$ ,  $f$  ne s'annule qu'en  $a$ .

On dérive  $W$ . Utilisant le fait que  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant  $f''$  et  $g''$  par leur valeur, on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On peut donc intégrer  $W$ , et on trouve

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right).$$

On peut remarquer que  $W(t_0)$  est le déterminant des deux vecteurs  $(f(t_0), f'(t_0))$  et  $(g(t_0), g'(t_0))$ . Ces deux vecteurs sont indépendants : s'ils étaient liés, par unicité au problème de Cauchy, on aurait  $f$  et  $g$  liés, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Donc  $W(t_0) \neq 0$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ . D'après les deux questions précédentes,  $W(\alpha)$  et  $W(\beta)$  sont de même signe, celui de  $W(t_0)$ . De plus,

$$W(\alpha) = -g(\alpha)f'(\alpha), \quad W(\beta) = -g(\beta)f'(\beta).$$

Or,  $f'(\alpha) \geq 0$  et  $f'(\beta) \leq 0$  car  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$  et  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ . Ceci entraîne que  $g(\beta)$  est du signe de  $W(t_0)$ , tandis que le signe de  $g(\alpha)$  est l'opposé du signe de  $W(t_0)$ . Ainsi,  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$  sont de signes opposés. On en déduit que  $g$  s'annule au moins une fois dans  $[\alpha, \beta]$ . En fait, en inversant les rôles joués par  $f$  et  $g$ , elle s'annule exactement une fois dans  $]\alpha, \beta[$ .

2. Soit  $a$  un zéro de  $f$ . Alors, par unicité au problème de Cauchy, et puisque  $f$  n'est pas la solution nulle, on sait que  $f'(a) \neq 0$ . Donc, par la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) \sim_a f'(a)(x - a).$$

Ainsi, au voisinage de  $a$ ,  $f$  ne s'annule qu'en  $a$ .

3. On dérive  $W$ . Utilisant le fait que  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant  $f''$  et  $g''$  par leur valeur, on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On peut donc intégrer  $W$ , et on trouve

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right).$$

On peut remarquer que  $W(t_0)$  est le déterminant des deux vecteurs  $(f(t_0), f'(t_0))$  et  $(g(t_0), g'(t_0))$ . Ces deux vecteurs sont indépendants : s'ils étaient liés, par unicité au problème de Cauchy, on aurait  $f$  et  $g$  liés, ce qui

n'est pas le cas par hypothèse. Donc  $W(t_0) \neq 0$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ . D'après les deux questions précédentes,  $W(\alpha)$  et  $W(\beta)$  sont de même signe, celui de  $W(t_0)$ . De plus,

$$W(\alpha) = -g(\alpha)f'(\alpha), \quad W(\beta) = -g(\beta)f'(\beta).$$

Or,  $f'(\alpha) \geq 0$  et  $f'(\beta) \leq 0$  car  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$  et  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ . Ceci entraîne que  $g(\beta)$  est du signe de  $W(t_0)$ , tandis que le signe de  $g(\alpha)$  est l'opposé du signe de  $W(t_0)$ . Ainsi,  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$  sont de signes opposés. On en déduit que  $g$  s'annule au moins une fois dans  $[\alpha, \beta]$ . En fait, en inversant les rôles joués par  $f$  et  $g$ , elle s'annule exactement une fois dans  $] \alpha, \beta [$ .

4. On dérive  $W$ . Utilisant le fait que  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle, et remplaçant  $f''$  et  $g''$  par leur valeur, on trouve :

$$W'(t) = -p(t)W(t).$$

On peut donc intégrer  $W$ , et on trouve

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t p(u) du \right).$$

5. On peut remarquer que  $W(t_0)$  est le déterminant des deux vecteurs  $(f(t_0), f'(t_0))$  et  $(g(t_0), g'(t_0))$ . Ces deux vecteurs sont indépendants : s'ils étaient liés, par unicité au problème de Cauchy, on aurait  $f$  et  $g$  liés, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Donc  $W(t_0) \neq 0$ .

6. Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ . D'après les deux questions précédentes,  $W(\alpha)$  et  $W(\beta)$  sont de même signe, celui de  $W(t_0)$ . De plus,

$$W(\alpha) = -g(\alpha)f'(\alpha), \quad W(\beta) = -g(\beta)f'(\beta).$$

Or,  $f'(\alpha) \geq 0$  et  $f'(\beta) \leq 0$  car  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$  et  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ . Ceci entraîne que  $g(\beta)$  est du signe de  $W(t_0)$ , tandis que le signe de  $g(\alpha)$  est l'opposé du signe de  $W(t_0)$ . Ainsi,  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$  sont de signes opposés. On en déduit que  $g$  s'annule au moins une fois dans  $[\alpha, \beta]$ . En fait, en inversant les rôles joués par  $f$  et  $g$ , elle s'annule exactement une fois dans  $] \alpha, \beta [$ .

7. Comme à la question précédente, on peut toujours supposer que  $f \geq 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Introduisons le "pseudo-wronskien"  $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ , que l'on dérive pour trouver

$$W'(t) = f(t)g(t)(p - q).$$

En vue d'une contradiction, supposons que  $g$  ne s'annule pas sur  $[\alpha, \beta]$ , par exemple  $g > 0$ . Alors  $W$  est décroissante sur  $[\alpha, \beta]$  et donc  $W(\beta) \leq W(\alpha)$ . Mais,  $W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) < 0$  tandis que  $W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) > 0$ . C'est une contradiction.

8. On introduit l'équation  $y'' + M^2 y = 0$ , dont les solutions sont proportionnelles à  $t \mapsto \sin(Mt + \theta)$ , où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Si  $q \leq M^2$ , soit  $\alpha < \beta$  deux zéros consécutifs de  $f$ . Si on suppose que  $\beta - \alpha < \pi/M$ , alors, on peut trouver  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la fonction  $g(t) = \sin(Mt + \theta)$  ne s'annule pas dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Mais alors ceci contredit le résultat de la question précédente... Si  $q \geq M^2$ , soit  $I = [\alpha, \beta]$  un intervalle de longueur  $\pi/M$ , et soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la fonction  $g(t) = \sin(Mt + \theta)$  s'annule en  $\alpha$  et en  $\beta$ . En appliquant la question précédente (attention, il faut permuter les rôles joués par  $f$  et  $g$ !), on voit que  $f$  admet un zéro dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .

9. Si  $q \leq M^2$ , soit  $\alpha < \beta$  deux zéros consécutifs de  $f$ . Si on suppose que  $\beta - \alpha < \pi/M$ , alors, on peut trouver  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la fonction  $g(t) = \sin(Mt + \theta)$  ne s'annule pas dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Mais alors ceci contredit le résultat de la question précédente...

10. Si  $q \geq M^2$ , soit  $I = [\alpha, \beta]$  un intervalle de longueur  $\pi/M$ , et soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que la fonction  $g(t) = \sin(Mt + \theta)$  s'annule en  $\alpha$  et en  $\beta$ . En appliquant la question précédente (attention, il faut permuter les rôles joués par  $f$  et  $g$ !), on voit que  $f$  admet un zéro dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .

11. Pour le niveau de l'exercice, c'est très simple... On trouve

$$v'' + \left( 1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2} \right) = 0.$$

Puisque  $y$  et  $v$  ont les mêmes zéros, on peut discuter sur  $v$ . Posant  $q(x) = 1 - (4\lambda^2 - 1)/(4x^2)$ , on voit que

Si  $\lambda \geq 1/2$ , alors  $q(x) \leq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au moins  $\pi$ . Si  $\lambda \leq 1/2$ , alors  $q(x) \geq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus  $\pi$ .

12. Pour le niveau de l'exercice, c'est très simple... On trouve

$$v'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) = 0.$$

13. Puisque  $y$  et  $v$  ont les mêmes zéros, on peut discuter sur  $v$ . Posant  $q(x) = 1 - (4\lambda^2 - 1)/(4x^2)$ , on voit que

Si  $\lambda \geq 1/2$ , alors  $q(x) \leq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au moins  $\pi$ . Si  $\lambda \leq 1/2$ , alors  $q(x) \geq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus  $\pi$ .

14. Si  $\lambda \geq 1/2$ , alors  $q(x) \leq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au moins  $\pi$ .

15. Si  $\lambda \leq 1/2$ , alors  $q(x) \geq 1$  : deux zéros consécutifs sont séparés d'au plus  $\pi$ .

### Correction de l'exercice 32 ▲

Il est clair que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ . On montre aisément par récurrence sur  $n$  que ses dérivées sont de la forme

$$t \mapsto P_n(t)e^{-1/t^2},$$

où les  $P_n$  sont des fractions rationnelles. Ainsi, pour chaque entier  $n$ ,  $f^{(n)}$  admet une limite en 0 égale à 0. Par le théorème de prolongement d'une dérivée,  $f$  est de classe  $C^\infty$ , avec  $f^{(n)}(0) = 0$ . Si  $f$  était solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$ ,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0,$$

elle vérifierait aussi la condition initiale  $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ . Or, d'après le théorème de Cauchy linéaire, cette équation n'admet qu'une seule solution pour ce problème de Cauchy. Comme 0 est solution et que  $f$  n'est pas identiquement nulle, on obtient une contradiction.

### Correction de l'exercice 33 ▲

Soit  $y$  une solution non-nulle de l'équation et soit  $t_0$  un zéro de  $y$ . Remarquons que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. D'après la partie unicité du théorème de Cauchy (dans sa version linéaire adaptée aux équations d'ordre  $n$ ), on est sûr qu'il existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $y^{(k)}(t_0) \neq 0$  (sinon  $y$  serait la fonction nulle). Soit  $p$  le plus petit des entiers  $k$  tel que  $y^{(k)}(t_0) \neq 0$ . Alors, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de  $t_0$ , on a

$$y(t) \sim_{t_0} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} (t - t_0)^p.$$

Ainsi, la fonction ne s'annule pas dans un voisinage de  $t_0$  ailleurs qu'en  $t_0$ .

### Correction de l'exercice 34 ▲

1. Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système s'écrit  $X' = AX$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^2(X - 6)$ .

0 est valeur propre double, mais  $A$  est de rang 1 et donc  $\ker(A)$  est de dimension 2. Une base de  $\ker(A)$  est donnée par les vecteurs  $u_1 = (1, 0, 1)$  et  $u_2 = (2, -1, 0)$ . D'autre part, une base de  $\ker(A - 6I)$  est donné par  $u_3 = (1, 2, -1)$ . Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant

$$X(t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma e^{6t} u_3.$$

2. Introduisons cette fois la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système s'écrit  $X' = AX$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique est  $X(X - 1)(X - 2)$ , de sorte que ses valeurs propres sont  $0, 1, 2$ , de vecteurs propres respectifs associés  $u_0 = (1, 1, -1)$ ,  $u_1 = (0, -1, 1)$ , et  $u_2 = (1, 1, 1)$ . Ainsi, les solutions sont données par les triplets

$$X(t) = \lambda u_0 + \mu e^t u_1 + \gamma e^{2t} u_2.$$

---

### Correction de l'exercice 35 ▲

1. Les valeurs propres (complexes) de  $A$  sont  $2, 1+i$  et  $1-i$ . Un vecteur propre associé à  $2$  est donné par  $V_2 = (1, 1, 1)$ . Pour  $1+i$ , un vecteur propre associé est  $V_{1+i} = (i, -1, 1)$ . Puisque  $A$  est une matrice réelle, on va trouver deux solutions réelles indépendantes en considérant  $\Re e(V_{1+i}e^{it})$  et  $\Im m(V_{1+i}e^{it})$ . Un petit calcul donne

$$\Re e(V_{1+i}e^{(1+i)t}) = e^t \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \Im m(V_{1+i}e^{(1+i)t}) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

En conclusion, un triplet  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  est solution du système ssi il existe trois constantes  $\alpha, \lambda$  et  $\mu$  telles que

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t \cos(t) - \mu e^t \sin(t) \\ x_2(t) = \alpha e^{2t} - \lambda e^t \sin(t) - \mu e^t \cos(t) \\ x_3(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t \sin(t) + \mu e^t \cos(t) \end{cases}$$

2. Les valeurs propres de la matrice sont  $1, i$  et  $-i$ . Un vecteur propre associé à  $1$  est  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Un

vecteur propre associé à  $i$  est  $V_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à  $-i$  est  $\overline{V_i}$ . Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice  $A$  est réelle)  $\Re e(V_i e^{it})$  et  $\Im m(V_i e^{it})$ . On trouve alors les solutions (indépendantes)

$$\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans  $\mathbb{R}$  est donc

$$\begin{pmatrix} \lambda e^t - \mu \sin(t) + \nu \cos(t) \\ -3\lambda e^t + \mu \cos(t) + \nu \sin(t) \\ -4\lambda e^t + 2\mu \cos(t) + 2\nu \sin(t) \end{pmatrix}.$$

---

### Correction de l'exercice 36 ▲

1. On calcule le polynôme caractéristique de  $A$  qui est  $(X - 2)^2(X - 1)$ . On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre  $1$ . On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre  $2$ . Malheureusement, on trouve qu'il est de dimension  $1$ , engendré par

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à trigonaliser  $A$  de la façon la plus simple possible en cherchant un vecteur  $v_3$  tel que  $(A - 2I_3)v_3 = v_2$ . Posant  $v_3 = (x, y, z)$ , on trouve le système

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 2z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

dont une solution est

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et  $Y = P^{-1}X$ . On a alors l'équivalence

$$X' = AX \iff Y' = TY.$$

Résolvons ce dernier système, qui s'écrit encore

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

On trouve immédiatement qu'il existe deux constantes  $a$  et  $c$  telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$y_1(t) = ae^t \text{ et } y_3(t) = ce^{2t}.$$

L'équation portant sur  $y_2$  s'écrit alors

$$y_2'(t) = 2y_2(t) + ce^{2t}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions qui s'écrivent  $be^{2t}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , tandis qu'on vérifie facilement qu'une solution particulière est la fonction  $t \mapsto cte^{2t}$ . Finalement, les solutions de  $Y' = TY$  sont les fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} ae^t \\ (ct + b)e^{2t} \\ ce^{2t} \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ . On retourne aux solutions de  $X' = AX$  par la relation  $X = PY$ , et on trouve les solutions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} (2ct + 2b - c)e^{2t} + 2ae^t \\ (ct + b)e^{2t} \\ ae^t + (ct + b)e^{2t} \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ .

2. On reprend la même méthode. Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X(X-1)^2$ . Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et donc la fonction constante  $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  est une solution. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . En particulier, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable. On va la trigonaliser en cherchant un vecteur  $v_3$  tel que  $(A - I)v_3 = v_2$ . On trouve  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On pose ensuite

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $Y = P^{-1}X$ . On résout le système  $Y' = TY$  dont les solutions sont

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ (b+ct)e^t \\ ce^t \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ . On retourne à  $X$  par la relation  $X = PY$  et on trouve que les solutions du système  $X' = AX$  sont les fonctions

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a + e^t(b+c+t(b+2c)) \\ e^t(b+t(2b+4c)) \\ 2a + e^t(b+3c+t(-b-2c)) \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ .

On peut aussi utiliser la méthode suivante. On cherche une solution sous la forme

$$X(t) = e^t(tV_2 + V_1).$$

On a  $X'(t) = AX(t)$  si et seulement si

$$\begin{cases} AV_2 = V_2 \\ AV_1 = V_1 + V_2 \end{cases} \iff \begin{cases} V_2 = (A-I)V_1 \\ (A-I)^2V_1 = 0 \end{cases}$$

On cherche alors l'expression d'un élément  $V_1$  de  $\ker(A-I)^2$ . Il est facile de vérifier que le noyau de  $(A-I)^2$  est le plan d'équation  $3X - 2Y - Z = 0$ , dont une base est constituée des vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  $V_1$  s'écrit donc

$$V_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda, \mu$  des réels. On en déduit

$$V_2 = (A-I)V_1 = (\lambda + 2\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions s'écrivent donc

$$v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \lambda + 3\mu \end{pmatrix} + (\lambda + 2\mu)te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu, v \in \mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 37 ▲

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$  la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs  $(-3, 4)$  et  $(4, -4)$ . Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  tel que  $X(t) = PY(t)$ . Le système se réécrit alors en

$$PY'(t) = APY(t) + B(t) \iff Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t),$$

où  $B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}$ . Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) + e^{3t}. \end{cases}$$

Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que

$$\begin{cases} y_1(t) &= \lambda e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ y_2(t) &= \mu e^{3t} + te^{3t} \end{cases}$$

Revenant à  $X(t)$ , on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) &= -3\lambda e^{2t} + 4\mu e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) &= 4\lambda e^{2t} - 4\mu e^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t}. \end{cases}$$

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice va simplement être trigonalisable. On pose donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice du système et

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = (X - 1)^2$ . La seule valeur propre de  $A$  est 1, et donc  $A$  n'est pas diagonalisable puisqu'elle n'est pas égale à  $I_2$ . Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est  $u = (1, 1)$ . On cherche ensuite  $v$  tel que  $Av = v + u$ , et on remarque que  $v = (0, 1)$  convient. Si on introduit alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors  $A = PTP^{-1}$  et un petit calcul donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  et  $C(t) = P^{-1}B(t)$ . On remarque que

$$\begin{aligned} X' &= AX + B \iff PY' = APY + B \\ &\iff Y' = TY + C. \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

et en notant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + 1 \\ y_2'(t) &= y_2(t) + t - 1. \end{cases}$$

On résout ce système de bas en haut. Les méthodes usuelles de résolution des équations différentielles du premier ordre donnent

$$y_2(t) = Ce^t - t, \quad C \in \mathbb{R},$$

et on obtient

$$y_1'(t) = y_1(t) + Ce^t - t + 1.$$



En utilisant à nouveau les mêmes méthodes, on trouve que

$$y_1(t) = De^t + Cte^t + t, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Revenant à  $X$  par la relation  $X = PY$ , on trouve finalement que les solutions de l'équation sont les fonctions qui s'écrivent

$$\begin{cases} x_1(t) &= (D + Ct)e^t + t \\ x_2(t) &= (-D + C - Ct)e^t, \end{cases}$$

où  $C, D \in \mathbb{R}$ .

---

### Correction de l'exercice 38 ▲

Posons

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre le système  $X'(t) = A(t)X(t)$ . On va procéder comme pour une matrice à coefficients constants, en diagonalisant pour chaque  $t$  la matrice  $A(t)$ . Son polynôme caractéristique est  $\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (t+1)X + t$ , dont les racines sont  $t$  et  $1$ . Le miracle est que les vecteurs propres ne dépendent pas de  $t$ . En effet, si on pose  $u_1 = (1, 1)$  et  $u_2 = (1, 2)$ , alors  $A(t)u_1 = u_1$  tandis que  $A(t)u_2 = tu_2$ . Autrement dit, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

on a  $A(t) = PD(t)P^{-1}$ . On peut donc résoudre le système exactement comme s'il était à coefficients constants. Plus précisément, en posant  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , alors  $Y$  est solution de  $Y'(t) = D(t)Y(t)$ , soit

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= ty_2. \end{cases}$$

Il vient  $y_1(t) = Ce^t$ , et  $y_2(t) = De^{t^2/2}$ , avec  $C, D \in \mathbb{R}$ . On revient à  $X$  par la relation  $X = PY$ , et on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) &= Ce^t + De^{t^2/2} \\ x_2(t) &= Ce^t + 2De^{t^2/2}, \end{cases}$$

avec  $C, D \in \mathbb{R}^2$ .

---

### Correction de l'exercice 39 ▲

Donnons deux méthodes. La première est de transformer le système en système d'ordre 1, mais de taille 4 (comme on change une équation linéaire d'ordre 2 en un système d'ordre 1). Pour cela, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Alors, on a  $X' = AX$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de résoudre le système comme un système classique. Une autre méthode, plus astucieuse, est de regarder un peu le système et d'observer la symétrie entre  $x(t)$  et  $y(t)$ . Ceci incite à poser  $u = x + y$  et  $v = x - y$ . Alors  $u$  et  $v$  sont solutions de

$$\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) + u(t) &= 0 \\ v''(t) - v(t) &= 0 \end{cases}$$

On résout ces équations, et on trouve

$$\begin{cases} u(t) &= (\lambda t + \mu)e^t \\ v(t) &= \alpha e^t + \beta e^{-t} \end{cases}$$

On retrouve alors facilement  $x$  et  $y$ .

---

#### Correction de l'exercice 40 ▲

On peut réduire la matrice  $A$  sur  $\mathbb{C}$ . Il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  est égale à l'une des deux matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Posant  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , le système est équivalent à

$$PY'(t) = APY(t) \iff Y'(t) = TY(t).$$

Toutes les normes sur  $\mathbb{C}^2$  étant équivalentes, il suffit de vérifier que les lignes de  $Y(t)$  sont toujours bornées.

Dans le premier cas ( $A$  diagonalisable), les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\mu t}.$$

Ces deux fonctions tendent toujours vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $\Re(\lambda) < 0$  et  $\Re(\mu) < 0$ . Dans le second cas ( $A$  trigonalisable), les solutions sont de la forme

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2) \text{ et } y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}.$$

Par comparaison des fonctions exponentielles et des polynômes, ceci tend toujours vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $\Re(\lambda) < 0$ .

---

#### Correction de l'exercice 41 ▲

On va noter  $M^T$  la transposée d'une matrice. La norme de  $X$  (au carré) est donnée par  $Y(t) = X(t)^T X(t)$ . On cherche une condition sur  $A$  pour que, pour toute solution  $X$ , la dérivée de  $Y$  est constante. Or,

$$Y'(t) = X'(t)^T X(t) + X(t)^T X'(t) = X(t)^T (A^T + A)X(t).$$

Ainsi, si  $A$  est antisymétrique, on a bien  $Y'(t) = 0$  et les solutions sont de norme constante. Réciproquement, si les solutions sont toutes de norme constante, on sait que, quelque soit le choix de  $X(0) \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$X(0)^T (A^T + A)X(0) = 0.$$

Par suite, si  $X(0)$  est un vecteur propre de l'endomorphisme symétrique  $A^T + A$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a

$$\lambda \|X(0)\|^2 = 0,$$

et donc  $\lambda = 0$ . Donc la seule valeur propre de  $A^T + A$  est 0. Cet endomorphisme étant symétrique, donc diagonalisable, on en déduit qu'il est nul et que  $A^T = -A$ , c'est-à-dire que  $A$  est anti-symétrique.

---

#### Correction de l'exercice 42 ▲

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , répétées avec leur multiplicité. Alors les valeurs propres de  $\exp(A)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . On en déduit que

$$\det(\exp(A)) = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j} = e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = \exp(\text{Tr} A).$$

---

#### Correction de l'exercice 43 ▲

---

Commençons par remarquer que si  $A$  est antisymétrique, alors  $A^T = -A$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\exp(A) \exp(A)^T &= \exp(A) \exp(A^T) \\ &= \exp(A) \exp(-A) \\ &= \exp(A - A) \text{ car } A \text{ et } -A \text{ commutent} \\ &= I_n.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\exp(A)$  est bien une matrice orthogonale.

---

### Correction de l'exercice 44 ▲

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on prouve facilement par récurrence que

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n \theta^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^n \theta^{2n} \end{pmatrix} \text{ et } A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \theta^{2n+1} \\ (-1)^n \theta^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition de l'exponentielle de matrice, on a donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

d'après le développement en série entière des fonctions sin et cos.

---

### Correction de l'exercice 45 ▲

1. En appliquant la division euclidienne de  $X^k$  par  $X^2 - 3X + 2$ , on sait que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_k, b_k \in \mathbb{K}$  et  $Q_k \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$$X^k = (X^2 - 3X + 2)Q_k(X) + a_k X + b_k.$$

Sachant que les racines de  $X^2 - 3X + 2$  sont 1 et 2, en évaluant cette égalité en  $X = 1$  et  $X = 2$ , on trouve le système

$$\begin{cases} 1 &= a_k + b_k \\ 2^k &= 2a_k + b_k \end{cases}$$

d'où l'on tire  $a_k = 2^k - 1$  et  $b_k = 2 - 2^k$ . Puisque  $X^2 - 3X + 2$  est un polynôme annulateur pour  $A$ , on trouve finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$A^k = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n.$$

2. En appliquant la définition, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)}{k!} A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 - 2^k}{k!} I_n \\ &= (e^2 - e)A + (2e - e^2)I_n.\end{aligned}$$


---

### Correction de l'exercice 46 ▲

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = (X - 1)^2(X + 1)$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $-1$  est  $\text{vect}(v_1)$ , où  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . L'espace propre associé à la valeur propre 2 est  $\text{vect}(v_2)$ , où  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable et on va la trigonaliser (ce qui est possible puisque son polynôme

caractéristique est scindé). Pour cela, on cherche  $v_3$  tel que  $(A - I_3)v_3 = v_2$  et on trouve par exemple  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $A = PTP^{-1}$  avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors  $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$ . Le calcul de  $P^{-1}$  ne pose pas de difficultés avec l'algorithme du pivot de Gauss, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer  $\exp(A)$ , on écrit  $A = D + N$  où  $D$  est la matrice diagonale  $D = \text{diag}(-1, 1, 1)$  et  $N$  est la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que  $D$  et  $N$  commutent de sorte que

$$\exp(D + N) = \exp(D) \exp(N).$$

Puisque  $N^2 = 0$ ,  $\exp(N) = 1 + N$  alors que  $\exp(D) = \text{diag}(e^{-1}, e, e)$ . Finalement, après un calcul encore assez long (et inintéressant, seule la méthode compte ici), on trouve

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e - e^{-1} & -e & e^{-1} \\ e - e^{-1} & e & e^{-1} - e \\ e - 2e^{-1} & -e & 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 47 ▲

1. Un calcul sans difficultés montre que  $\chi_A(X) = (X - 1)^3$ .

2. Posons  $N = A - I_3$ . Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $N^3 = 0$ , et donc  $N$  est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de  $N$ . En effet, on a

$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

D'autre part, puisque  $tA = tI_3 + tN$  et que  $tI_3$  et  $tN$  commutent, on a

$$\exp(tA) = \exp(tI_3) \exp(tN) = e^t \left( I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$

On en déduit

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Alors  $X(t) = \exp(tA)X(0)$ . En notant  $X(0) = (a, b, c)$ , on trouve

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(t+1)e^t + bt^2e^t + c(t^2+t)e^t \\ x_2(t) &= ate^t + b(t^2-2t+1)e^t + c(t^2-t)e^t \\ x_3(t) &= -ate^t + b(-t^2+2t)e^t + c(-t^2+t+1)e^t. \end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 48 ▲**

---

Introduisons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $B^n = 0$  pour  $n \geq 3$ . De plus,  $A = (aI_3 + bB + cB^2)$ . Puisque  $I_3, B$  et  $B^2$  commutent, on a

$$\exp(A) = \exp(a) \exp(bB) \exp(cB^2).$$

Or, utilisant que  $B^n = 0$  pour  $n \geq 3$ , on trouve

$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2 B^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \exp(A) &= e^a \left( I_3 + bB + \frac{b^2 B^2}{2} \right) (I_3 + cB^2) \\ &= e^a \left( I_3 + bB + \left( \frac{b^2}{2} + c \right) B^2 \right) \end{aligned}$$

soit

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left( \frac{b^2}{2} + c \right) e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

La solution générale de  $X' = AX$  est alors donnée par  $X(t) = \exp(tA)X(0)$ , soit, en posant  $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$X(t) = \alpha e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{at} \begin{pmatrix} bt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{at} \begin{pmatrix} ct + \frac{b^2 t^2}{2} \\ bt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---